ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 91 1990 № 4

МЕХАНИКА

УДК 532.516

Л. Г. Петросян

О несимметричной модели плоского движения жидкости между двумя вращающимися коаксиальными цилиндрами

(Представлено чл.-корр. АН Армении Г. Е. Багдасаряном 16/VII 1990)

Классическая теория континуума налагает сильные ограничения на пределы, в которых континуальное описание макроскопического поведения может успешно отражать тонкую структуру материала. Накопившиеся факты свидетельствуют о том, что классическая теория континуума Навье-Стокса не может точно предсказать поведение некоторого класса жидкостей и особенно течений через тонкие капилляры и узкие зазоры, так как не содержит механизма для объяснения наблюдаемых новых физических явлений. Такая потеря точности возможна в случаях, когда характерный размер системы сравним с характерной материальной длиной вещества, значение которой обусловлено средним размером молекул или зерен, содержащихся в среде ([1]).

Разработанные в последнее время положения теории структурных жидкостей могут успешно описывать неньютоновские поведения реальных жидкостей*. В этой теории введены два независимых кинематических векторных поля, одно из которых представляет поступательные движения частиц жидкости, а другое—угловые или вращательные движения частиц, характеризующие внутренние степени свободы, соответствующие им моментные напряжения ([1, 2]). Характерным отличием теории структурных сред с несимметричным тензором напряжений является присутствие масштабных параметров. Эти жидкости реагируют на микровращательные движения и спиновую инерцию, поэтому могут воспринимать распределенные поверхностные и массовые пары сил.

В работе применена теория континуума с несимметричным тензором напряжений к решению задачи плоского движения несжимаемой жидкости между двумя вращающимися с разными угловыми скоростями коаксиальными цилиндрами. Общие вопросы теории жидкости с несимметричным тензором напряжений рассмотрены в работах ([1, 2]).

* К настоящему времени опубликовано большое количество работ, посвященных этой тематике, о чем достаточно полно изложено в работе ([1]).

Общая система уравнений движения вязкой, несжимаемой жидкости с несимметричным тензором напряжений имеет вид ([1, 3])

$$\nabla\cdot\vec{v} = 0$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + 2\nu\nabla\cdot(\nabla\vec{v})^d + \nu_r\nabla\times(2\vec{\omega} - \nabla\times\vec{v}) + \vec{f}, \qquad (1)$$

$$I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 2\nu_r(\nabla\times\vec{v} - 2\vec{\omega}) + c_0\nabla(\nabla\cdot\vec{\omega}) + 2c_d\nabla\cdot(\nabla\vec{\omega})^d + 2c_a\nabla\cdot(\nabla\vec{\omega})^a + \vec{c}.$$

Здесь ρ — массовая плотность, p — давление, I — скалярная константа с размерностью момента инерции единицы массы, $\vec{v}$ — вектор скорости точки, $\vec{\omega}$ — вектор, характеризующий среднюю угловую скорость вращения частиц, из которых состоит точка континуума, ν — кинематическая ньютоновская вязкость, ν_r — кинематическая вращательная вязкость, c_0, c_d и c_a — коэффициенты моментной вязкости, $d(...)/dt$ — полная производная по времени, ∇ — пространственный градиент, $(\nabla\vec{v})^d$ и $(\nabla\vec{\omega})^d$ — симметричные части соответствующих диад, $(\nabla\vec{v})^a$ и $(\nabla\vec{\omega})^a$ — антисимметричные диады, $\vec{f}$ — вектор массовой силы, $\vec{c}$ — вектор массового момента.

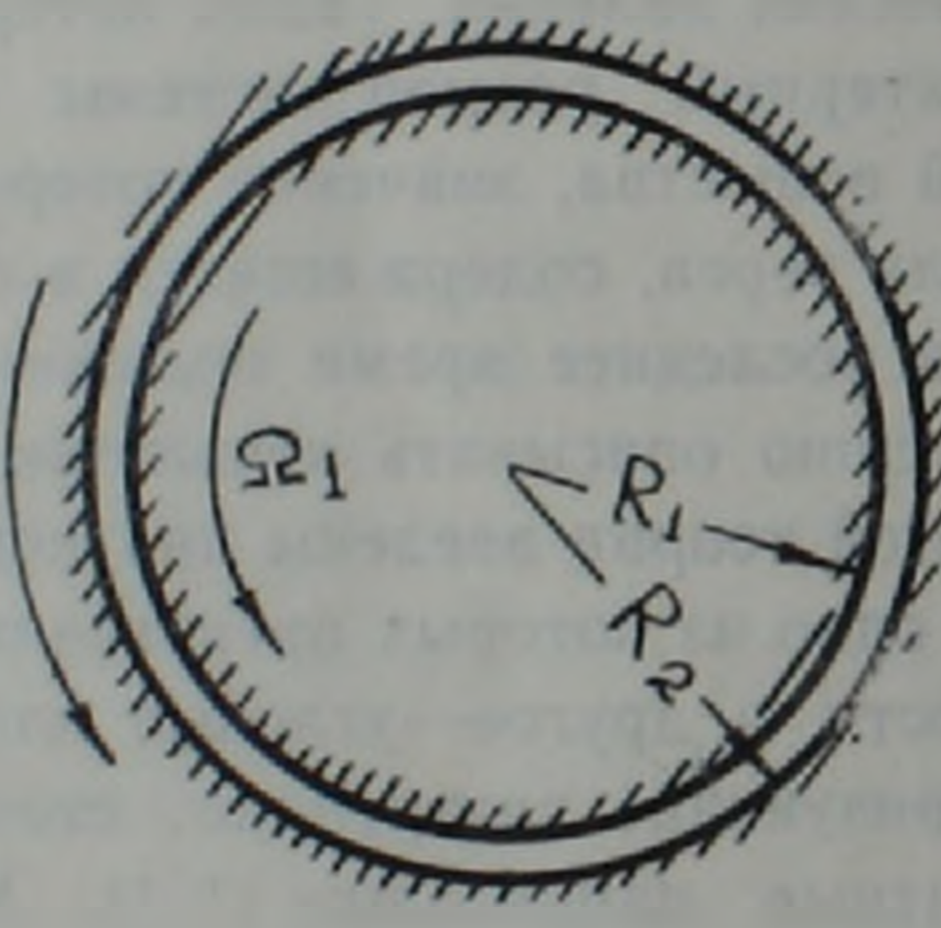

Рис. 1. Поперечное сечение вращающихся коаксиальных цилиндров

Воспользуемся цилиндрическими координатами r, φ, z. Рассмотрим стационарное движение несжимаемой жидкости между концентрическими цилиндрами (рис. 1). Тогда траектории всех частиц представляют собой дуги концентрических окружностей. Действием массовых сил и моментов пренебрегаем.

Пусть внутренний цилиндр имеет радиус R_1 и вращается с угловой скоростью Ω_1, а внешний имеет радиус R_2 и вращается с угловой скоростью Ω_2.

Мы предполагаем, что жидкость прилипает к стенкам внутреннего и внешнего цилиндров при $r=R_1$ и $r=R_2$, тогда граничные условия для поступательной скорости и угловой скорости вращения частиц будут

$$\begin{aligned} &\text{при} \quad r = R_1 \quad v_\varphi = \Omega_1 R_1, \quad \omega = 0, \\ &\text{при} \quad r = R_2 \quad v_\varphi = \Omega_2 R_2, \quad \omega = 0 \quad (\omega = \omega_z). \end{aligned} \tag{2}$$

Для давления из (1) будем иметь

$$p = C\varphi + \rho \int^r \frac{v_\varphi}{r} dr + C_5. \tag{3}$$

Мы видим, что давление при изменении угла φ будет многозначной функцией. Для устранения этой многозначности надо положить

$$C = 0. \tag{4}$$

Используя граничные условия (2) и равенство (4) из (1), получим выражения для скорости v_φ и угловой скорости вращения частиц ω

$$v_\varphi^* = \frac{v_\varphi}{\Omega_1 R_1} = \frac{2\eta_r}{\eta + \eta_r} \frac{1}{\lambda} [C_2^* I_1(\lambda r^*) - C_3^* K_1(\lambda r^*)] + C_1^* r^* + \frac{C_4^*}{r^*}, \tag{5}$$

$$\omega^* = \frac{\omega R_1}{\Omega_1 R_1} = C_2^* I_0(\lambda r^*) + C_3^* K_0(\lambda r^*) + C_1^*. \tag{6}$$

Здесь

$$r^* = \frac{r}{R_1}, \quad k = \frac{N}{l}, \quad N = \left(\frac{\eta_r}{\eta + \eta_r}\right)^{1/2}, \quad l = \left(\frac{C_a' + C_d'}{4\eta}\right)^{1/2},$$

$$\lambda = kR_1 = \left(\frac{4\eta}{\eta + \eta_r} \frac{\eta_r}{c_a' + c_d'}\right)^{1/2} R_1, \quad \eta = \rho\nu, \quad \eta_r = \rho\nu_r,$$

$$c_a' = \rho c_a, \quad c_d' = \rho c_d,$$

а постоянные интегрирования C_1^*, C_2^*, C_3^* и C_4^* даются соотношениями

$$C_1^* = \frac{C_1}{\Omega_1} = \left(1 - \frac{\Omega_2 R_2^2}{\Omega_1 R_1^2}\right) \left[I_0\left(\lambda \frac{R_2}{R_1}\right) K_0(\lambda) - I_0(\lambda) K_0\left(\lambda \frac{R_2}{R_1}\right)\right] A, \tag{7}$$

$$C_2^* = \frac{C_2}{\Omega_1} = \left(1 - \frac{\Omega_2 R_2^2}{\Omega_1 R_1^2}\right) \left[K_0(\lambda) - K_0\left(\lambda \frac{R_2}{R_1}\right)\right] A, \tag{8}$$

$$C_3^* = \frac{C_3}{\Omega_1} = \left(1 - \frac{\Omega_2 R_2^2}{\Omega_1 R_1^2}\right) \left[I_0(\lambda) - I_0\left(\lambda \frac{R_2}{R_1}\right)\right] A, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} C_4^* = \frac{C_4}{\Omega_1 R_1^2} = 1 + \Bigg\{ \frac{2N^2}{\lambda} \Bigg\{ \frac{1}{\lambda} - \Bigg[I_1(\lambda) K_0\left(\lambda \frac{R_2}{R_1}\right) + \\ + I_0\left(\lambda \frac{R_2}{R_1}\right) K_1(\lambda) \Bigg]\Bigg\} - \Bigg[I_0\left(\lambda \frac{R_2}{R_1}\right) K_0(\lambda) - \\ - I_0(\lambda) K_0\left(\lambda \frac{R_2}{R_1}\right) \Bigg]\Bigg\} \left(1 - \frac{\Omega_2 R_2^2}{\Omega_1 R_1^2}\right) A, \end{aligned} \tag{10}$$

$$A = \left\{\left[I_0\left(\lambda\frac{R_2}{R_1}\right)K_0(\lambda) - I_0(\lambda)K_0\left(\lambda\frac{R_2}{R_1}\right)\right]\left(1-\frac{R_2^2}{R_1^2}\right)+\right.$$

$$+\frac{2N^2}{\lambda}\left\{\left|I_1(\lambda)K_0\left(\lambda\frac{R_2}{R_1}\right)+I_0\left(\lambda\frac{R_2}{R_1}\right)K_1(\lambda)\right|+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{R_2}{R_1}\left|I_0(\lambda)K_1\left(\lambda\frac{R_2}{R_1}\right)+K_0(\lambda)I_1\left(\lambda\frac{R_2}{R_1}\right)\right|-\frac{2}{\lambda}\right\}\right\}^{-1}. \tag{11}$$

где $I_0(\lambda r^*)$ и $I_1(\lambda r^*)$ — модифицированные цилиндрические (бесселевые) функции нулевого и первого порядка первого рода, $K_0(\lambda r^*)$ и $K_1(\lambda r^*)$ — нулевого и первого порядка второго рода.

Решение (5) переходит в классическое при $\eta_r = 0$ [4] и (6) дает $\omega = 0$.

Обобщенная гипотеза Ньютона—Навье—Стокса для изотропных несжимаемых жидкостей с несимметричным тензором напряжений имеет вид [1]

$$\tau_{ji} = p\delta_{ji} + \eta(v_{j,i}+v_{i,j}) + \eta_r(v_{i,j}-v_{j,i}) + 2\eta_r\varepsilon_{mij}\omega_m,$$

откуда касательное напряжение силы вязкости для кругового движения представится в виде

$$\tau_{r\varphi} = (\eta+\eta_r)\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - (\eta-\eta_r)\frac{v_\varphi}{r} - 2\eta_r\omega. \tag{12}$$

Здесь δ_{ij} — дельта тензор Кронекера, ε_{mij} — альтернирующий тензор Леви—Чивиты.

Подставляя значения v_φ из (5) и ω из (6) с учетом (8)—(10) получим

$$\tau_{r\varphi} = -2\eta\frac{C_4}{r^2} - 2\eta N^2\left|C_2\frac{1}{kr}I_1(kr) + C_3\frac{1}{kr}K_1(kr)\right|. \tag{13}$$

Момент всех сил вязкости,распределенных по какой-либо окружности радиуса r относительно оси симметрии, с учетом (13) будет иметь вид

$$M = \int_0^{2\pi}\tau_{r\varphi}r^2\,d\varphi =$$

$$= -4\pi\eta\left\{C_4 + N^2\left[C_2I_1(\lambda r^*) + C_3K_1(\lambda r^*)\right]\frac{r^*R_1^2}{\lambda}\right\}. \tag{14}$$

Для обсуждения результатов удобнее формулу (14) представить в безразмерном виде

$$M^* = \frac{M}{M_{кл}} = \left\{C_4^* + N^2\left[C_2^*I_1(\lambda r^*) + C_3^*K_1(\lambda r^*)\right]\frac{r^*}{\lambda}\right\}\times$$

$$\times\left(1-\frac{R_1^2}{R_2^2}\right)\left(1-\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)^{-1}. \tag{15}$$

где $M_{кл}$ — момент сил вязкости в случае классической ньютоновской жидкости [4].

На рис. 2 показаны графики зависимости безразмерного момента всех сил вязкости, распределенного по окружности $r^* = 1{,}01$ относительно оси симметрии, от N^2 при различных значениях параметра λ, характеризующего взаимосвязь между геометрией и свойствами жидкости (расчеты были выполнены для $R_2/R_1 = 1{,}02$ и $\Omega_2/\Omega_1 = 5$). График показывает, что увеличению параметра N^2 соответствует возрастание безразмерного момента всех сил вязкости при всех значениях λ, кроме $\lambda = \infty$, относящегося к классическому случаю ньютоновской жидкости, так как увеличению λ соответствует увеличение R_2/R_1, т. е. увеличению зазора между стенками внешнего и внутреннего цилиндров (в расчетах изменение λ происходит за счет изменения l).

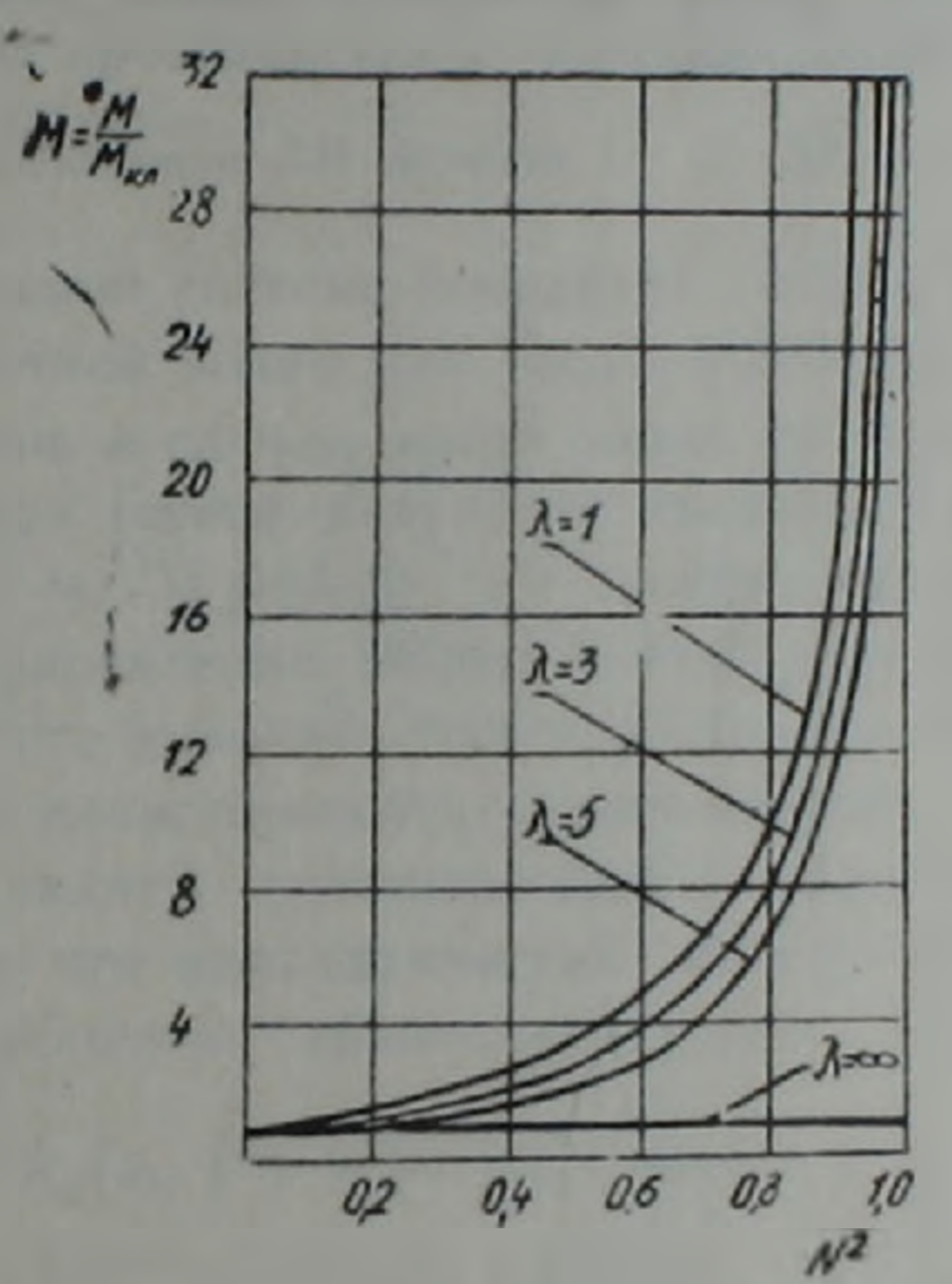

Рис. 2. Зависимости безразмерного момента всех сил вязкости M^* от N^2 при различных λ.

Таким образом, неклассические эффекты тем больше, чем меньше характерный размер системы.

Ереванский государственный
университет

Լ. Գ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Երկու պտտվող համառանցք գլանների միջև հեղուկի հարթ շարժման ոչ սիմետրիկ մոդելի մասին

Երկու պտտվող համառանցք գլանների միջև հեղուկի հարթ շարժման խնդրի լուծման համար օգտագործված է ոչ սիմետրիկ լարման տենզորով *կառուցվածքային հեղուկի մեխանիկայի մոդելը։ Ստացված են անալիտիկ արտահայտություններ արագության, անկյունային արագության, օղակային չերտերի միջև շոշափող լարումների համար, ինչպես նաև որևէ շառավղով շրջանագծի շփման ուժերի պտտման առանցքի նկատմամբ գումարային մոմենտի համար։ Միկրոկառուցվածքի հաշվառման ազդեցությունը լուսաբանված է գրաֆիկների վրա։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 *Л. Г. Петросян*, Некоторые вопросы механики жидкости с несимметричным тензором напряжений, Изд-во ЕГУ, 1984. 2 *Э. Л. Аэро, А. Н. Булыгин, Е. В. Кувшинский*, ПММ, т. 29, вып. 2, с. 297—308 (1965). 3 *Нгуен Ван Дьеп, А. Т. Листров*, Изв. АН СССР, МЖГ, № 5, с. 132—136, 1967. 4 *Н. А. Слезкин*, Динамика вязкой несжимаемой жидкости, ГИТТЛ, М., 1955.