ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 91 1990 № 4

МАТЕМАТИКА

УДК 517.53

Ф. А. Шамоян, А. В. Арутюнян

Теплицевы операторы в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций

(Представлено академиком АН Армении М. М. Джрбашяном 17/VII 1990)

1°. Пусть U^n — единичный полидиск n-мерного комплексного пространства $\mathbf{C}^n$, $\mathbf{T}^n$ — его остов, $H(U^n)$ — множество всех голоморфных в U^n функций. С мультииндексом $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ $(\alpha_j > -1$, $1 < j < n)$ свяжем пространство

$$H^p(\alpha) = H^p(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \Big\{ f \in H(U^n);\ \|f\|_{H^p(\alpha)} =$$

$$= \Big(\int_{U^n} |f(\xi)|^p (1 - |\xi|)^\alpha dm_{2n}(\xi) \Big)^{\frac{1}{p}} < +\infty \Big\};$$

здесь m_{2n} $2n$-мерная мера Лебега на U^n, $(1-|\xi|)^\alpha = (1-|\xi_1|)^{\alpha_1} \times \cdots \times (1-|\xi_n|)^{\alpha_n}$. В одномерном случае эти пространства были введены и изучены в работах М. М. Джрбашяна [1,2]. В этой заметке мы исследуем ограниченность теплицевых операторов в пространствах типа $H^p(\alpha)$. Напомним, что оператором Теплица с символом $h \in L^1(\mathbf{T}^n)$ называется следующий интегральный оператор:

$$T_h(f)(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T^n} \frac{f(\xi) \cdot h(\xi)}{\xi - z} d\xi, \qquad z \in U^n. \tag{1}$$

Исследуя T_h на пространствах $H^p(\alpha)$, мы, естественно, рассматриваем их сначала на всюду плотном подмножестве $H^p(\alpha)$, скажем, на подмножестве $C_A(U^n) = C(\overline{U}^n) \cap H(U^n)$, или же на множестве всех многочленов. Мы найдем полное описание тех символов h, при которых соответствующий оператор T_h имеет ограниченное расширение всюду на этих пространствах. Отметим, что часть приведенных результатов в одномерном случае ранее была получена первым автором (см. [3,4]). Подчеркнем, однако, что поведение операторов вида (1) существенно отличается от одномерного случая и от случая сферы. Так, например, классическая теорема И. И. Привалова о гладкости интеграла типа Коши от гладкой функции в случае тора не имеет места (см. ([5])), хотя в случае сферы хорошо известен прямой аналог этой теоремы (см. ([6])). Приложения операторов Теплица в различных вопросах анализа широко известны (см., например ([7, 8])).

В конце заметки мы приведем одно из таких приложений. При получении результатов заметки мы используем описание линейных непрерывных функционалов на пространствах $\Xi^{n}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ (см. ([9]))

2°. Для изложения основных результатов заметки сначала приведем определение интегродифференциального оператора дробного порядка.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $-1 < \alpha_j < +\infty$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $f \in H(U^n)$, $f(z) = \sum\limits_{|k|=0}^{\infty} a_k z^k$, положим

$$D^{\alpha} f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha_1 + 1 + k_1) \ldots \Gamma(\alpha_n + 1 + k_n)}{\Gamma(\alpha_1 + 1) \ldots \Gamma(\alpha_n + 1) \Gamma(k_1 + 1) \ldots \Gamma(k_n + 1)} \times$$
$$\times a_{k_1 \ldots k_n} z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n}, \quad z \in U^n. \tag{2}$$

Очевидно, что если $f \in H(U^n)$, то $D^{\alpha} f \in H(U^n)$. Обозначим через Λ_{α}^{p}, $0 < p \leqslant 1$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ класс функций $f \in H(U^n)$, для которых при $\beta_j > \frac{\alpha_j + 2}{p}$, $1 \leqslant j \leqslant n$ выполняется оценка

$$\|f\|_{\Lambda_{\alpha}^{p}} = \sup_{z \in U^n} \left\{ |D^{1+\beta} f(z)| (1 - |z|)^{\beta + 2 - \frac{\alpha + 2}{p}} \right\} < +\infty,$$
$$\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in Z_{+}^{n}. \tag{3}$$

Введем в рассмотрение также

$$H_{\beta}^{p}(\alpha) = \{ f \in H(U^n) : \|f\|_{H_{\beta}^{p}(\alpha)} = \|D^{\beta} f\|_{H^{p}(\alpha)} < +\infty \}.$$

Определение. *Скажем, что суммируемая на* T^n *функция* h *принадлежит классу* RP, *если коэффициенты Фурье функции* h *равны нулю вне множества* $Z_{+}^{n} \cup (-Z_{+}^{n})$.

В дальнейшем будем всегда предполагать, что $h \in RP$. Символом $H^{p}(U^n)$ обозначим класс Харди в U^n.

Теорема 1. *Пусть* $0 < p < 1$. *Тогда оператор* T_h *действует в пространствах* $H^{p}(\alpha)$ *тогда и только тогда, когда* $h = h_1 + h_2$, *где* $h_1 \in H^{\infty}(U^n)$, $h_2 \in \Lambda_{\alpha}^{p}$.

Теорема 2. *Пусть* $1 < p < \alpha_i + 2$, $1 \leqslant i \leqslant n$. *Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) $T_h(f) \in H^{p}(\alpha)$, *для любой* $f \in H^{p}(\alpha)$;

2) *функция* h *представима в виде* $h = h_1 + h_2$, *где* $h_1 \in H^{\infty}(U^n)$, $D^{1+\alpha} h_2 \in H^{q}(\alpha)$, $q = \frac{p}{p-1}$.

В следующей теореме необходимое условие ограниченности оператора T_h близко к достаточному.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha_j + 2 \leqslant p < +\infty$, $1 \leqslant j \leqslant n$, *тогда, если* T_h *действует в пространстве* $H^p(\alpha)$, *то* $h \in L^\infty$, *при этом* $h = h_1 + h_2$, *где* $h_1 \in H^\infty(U^n)$, $D^{1+\alpha} h_2 \in H^q(\alpha)$, $q = \dfrac{1}{p-1}$. *И обратно, если* $h = h_1 + h_2$, *где* $h_1 \in H^\infty(U^n)$, $D^{1+\alpha} h_2 \in H^q(\alpha)$, $q = \dfrac{p}{p-1}$, *тогда оператор* T_h *действует на пространстве* $H^p(\alpha)$.

В следующих теоремах устанавливается ограниченность операторов в пространствах $H^p_k(\alpha)$.

Теорема 4. *Пусть* $0 < p \leqslant 1$, $k = (k_1, \ldots, k_n) \in Z^n_+$, *при этом* $p(k_i + 1) < \alpha_i + 2$, $1 \leqslant i \leqslant n$. *Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) $T_h(f) \in H^p_k(\alpha)$ *для любой* $f \in H^p_k(\alpha)$.

2) $h = h_1 + h_2$, *где* h_1, *мультипликатор пространства* $H^p_k(\alpha)$, h_2 *удовлетворяет условию: функция*

$$F(z) = \int\limits_0^{z_1} \cdots \int\limits_0^{z_n} (z_1 - t_1)^{k_1 - 1} \cdots (z_n - t_n)^{k_n - 1} h_2(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n \quad (4)$$

принадлежит классу Λ^p_α.

Теорема 5. *Пусть* $0 < p < 1$, $pk_i > \alpha_i + 2$, $1 \leqslant i \leqslant n$. *Тогда если* T_h *действует в пространстве* $H^p_k(\alpha)$, *то* $h = h_1 + h_2$, *где* $h_1 \in H^p_k(\alpha)$, $h_2 \in H^\infty$. *И обратно, если* $h = h_1 + h_2$, *где* $h_1 \in H^k_p(\alpha)$, $h_2 \in H^\infty$, *то* $T_h(f)$ *действует в пространствах* $H^p_k(\alpha)$.

В следующей теореме мы будем предполагать, что $h \in H^1(U^n)$.

Теорема 6. *Пусть* $p(k_i + 1) = \alpha_i + 2$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $0 < p \leqslant 1$. *Тогда если оператор* T_h *действует в пространстве* $H^p_k(\alpha)$, *то* $h \in H^\infty(U^n)$, *при этом*

$$|D^n h(z)| \leqslant \frac{\text{const}}{(1 - |z_1|) \log \dfrac{1}{1 - |z_1|} \cdots (1 - |z_n|) \log \dfrac{1}{1 - |z_n|}}, \quad (5)$$

$$z = (z_1, \ldots, z_n) \in U^n.$$

И обратно, если $h \in H^\infty(U^n)$ *и кроме того удовлетворяет оценке*

$$|D^n h(z)| \leqslant \frac{\text{const}}{(1 - |z_1|)\left(\log \dfrac{1}{1 - |z_1|}\right)^{1/p} \cdots (1 - |z_n|)\left(\log \left(\dfrac{1}{1 - |z_n|}\right)\right)^{1/p}}, \quad (6)$$

то T_h *действует в пространстве* $H^p_k(\alpha)$.

Теорема 7. *Предположим, что* $p>1$ *и* $p(k_i+1)<\alpha_i+2$, $1\leqslant i\leqslant n$. *Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) T_h — *действует в пространствах* $H_k^p(\alpha)$;

2) *функция* h *допускает такое представление* $h=h_1+h_2$, *где* h_1 *является мультипликатором пространства* $H_k^p(\alpha)$, *а функция*

$$F(z)=\int_0^{z_1}\cdots\int_0^{z_n}(z_1-t_1)^{k_1-1}\cdots(z_n-t_n)^{k_n-1}h_2(t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n$$

принадлежит классу $H_{\alpha+1}^q(\gamma)$.

При других значениях параметров p, α и k справедлива

Теорема 8. *Пусть* $1<p<+\infty$, *при этом* $p\cdot k_i>\alpha_i+2$, $1\leqslant i\leqslant n$. *Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) T_h *действует в пространстве* $H_k^p(\alpha)$,

2) h *представима в виде* $h=h_1+h_2$,

где $h_1\in H_k^p(\alpha)$, $h_2\in H^\infty(U^n)$.

Наметим ход доказательств теорем 1—8. Пусть X совпадает с одним из указанных пространств. Предположим, что $T_h(f)$ действует в X. Тогда

$$\|T_h(f)\|_X\leqslant\mathrm{const}\|f\|_X. \tag{7}$$

Учитывая очевидную оценку $|T_h(f)(0)|\leqslant\mathrm{const}\|T_h(f)\|_X$, отсюда получаем, что $\Phi(f)=T_h(f)(0)$ является линейным непрерывным функционалом на X. Используя результаты работы ([9]), выводим необходимые условия на h. В доказательстве достаточности полученных условий существенную роль играет представление

$$T_h(f)(z)=h_1(z)f(z)+\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\mathbf{T}^n}\frac{f(\xi)\overline{h_2(\xi)}}{\xi-z}\,d\xi,\qquad z\in U^n.$$

Замечание. *Используя очевидное равенство*

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\mathbf{T}^n}\frac{f(\xi)\overline{h(\xi)}}{(\xi-z)^2}\,d\xi=\frac{1}{\pi^n}\int_{U^n}\frac{D^n f(\xi)\overline{h(\xi)}}{(1-\xi z)^2}\,dm_{2n}(\xi),\qquad z\in U^n,$$

$\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$, $h\in H^1(U^n)$, $f\in H_n^p(\alpha)$, *из вышеуказанных утверждений можно получить характеристику тех* $h\in H^1(U^n)$, *при которых операторы последнего вида действуют в пространствах* $H_k^p(\alpha)$, $k=(k_1,\ldots,k_n)\in Z_+^n$.

Наконец приведем приложения полученных результатов к вопросам деления на внутреннюю функцию в пространствах $H_k^p(\alpha)$.

Определение. *Функция* $g\in H^\infty(U^n)$ *называется внутренней, если ее радиальные предельные значения почти всюду на* $\mathbf{T}^n$ *удовлетворяют условию* $|g^*(w)|=1$.

Определение. *Внутреннюю функцию g в U^n будем называть хорошей, если $u[g]=0$.*

Напомним, что $u[g]$ — это наименьшая n-гармоническая мажоранта функции $\log|g|$ в U^n (см. [10]).

Теорема 9. *Пусть функция f принадлежит классу $H^p_k(\alpha)$, J — хорошая внутренняя функция, F — голоморфная в U^n функция и $f=F\cdot J$. Тогда функция F принадлежит классу $H^p_k(\alpha)$.*

Институт математики
Академии наук Армении

Ֆ. Ա. ՇԱՄՈՅԱՆ, Ա. Վ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Տյոպլիցյան օպերատորներ բազմաշրջանում անալիտիկ ֆունկցիաների անիզոտրոպ տարածություններում

Աշխատանքում դիտարկված է

$$T_h(f)(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{T^n}\frac{f(\xi)\cdot h(\xi)}{\xi-z}d\xi,\quad h\in L^1(T^n),\quad z\in U^n$$

օպերատորի սահմանափակության հարցը բազմաշրջանում անալիտիկ ֆունկցիաների $H^p_k(\alpha)$ անիզոտրոպ տարածություններում, որտեղ

$$k=(k_1,\dots,k_n)\in Z^n_+,\quad \alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n);\quad \alpha_j>-1,\quad 1\le j\le n:$$

Ստացվել են նշված օպերատորի սահմանափակության անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ։

Հոդվածի վերջում բերված է ստացված արդյունքների կիրառությունը բազմաշրջանում հոլոմորֆ ֆունկցիաների տարածություններում ներքին ֆունկցիաների վրա բաժանելիության հարցերում։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян*, ДАН АрмССР, т. 3, № 1, с. 3—9 (1945). [2] *М. М. Джрбашян*, Сообщ. Ин-та математики и механики АН АрмССР, вып. 2, с. 3—30, 1948 г. [3] *Ф. А. Шамоян*, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 8, № 6, с. 474—490, (1973). [4] *Ф. А. Шамоян*, ДАН АрмССР, т. 76, № 3, с. 109—113 (1983). [5] *Б. Ерикке*, Math. Nachrichten, v. 107, p. 221—233 (1982). [6] *У. Рудин*, Теория функций в единичном шаре из C^n, Мир, М., 1984. [7] *В. В. Пеллер, С. В. Хрущев*, УМН, т. 37, вып. 1 (223), с. 53—124 (1982). [8] *J. P. Kahane*, Bull. Amer. Math. Soc., v. 80, № 5, p. 788—804 (1974). [9] *Ф. А. Шамоян*, Сибирский мат. журн., т. 31, № 2, с. 195—215 (1990). [10] *У. Рудин*, Теория функций в поликруге, Мир, М., 1974.