ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Том 91 1990 № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 519.1

Б. Е. Торосян

Оценки количеств функционально-отделимых подмножеств конечного множества

(Представлено академиком АН Армении Р. Р. Варшамовым 29/VII 1990)

Работа представляет возможности распространения полученных ранее результатов автора и других на конечные множества произвольной природы. Здесь в основном развиваются два различных подхода к установлениям соответственно верхних и нижних оценок для количеств подмножеств A_0 непустого конечного множества A, отделимых от $A \setminus A_0$ знаками и нулями некоторой, определенной и вещественнозначной в A функции (отображения) $F_0 \in \{F\}$, где $\{F\}$—заданное множество функций. Оба подхода позволяют получить оценки как для числа указанного типа подмножеств $A_0 \subseteq A$, имеющие заданную мощность, так и для полного их числа.

Первый из этих подходов впервые был замечен в ([1]) и получил дальнейшее развитие в ([2–6]). Он, вообще говоря, использует замеченные в ([1–5]) обобщения теоремы, доказанной Чоу (см. в ([7])) относительно пороговых булевых функций (линейно-отделимых подмножеств гиперкуба $\{0, 1\}^n$), и применяется к верхним оценкам. Отметим, что Чоу и другие пользовались этой теоремой в задачах синтеза пороговых логических элементов и схем из них.

Второй развивает известный индуктивный метод Блоха и Моравека ([8]), Яджимы и Ибараки ([9]), примененного ими к нижней оценке полного числа пороговых булевых функций. Развитый индуктивный метод настоящей работы, в сочетании со следующей из результатов работ ([10–12]) верхней оценкой, позволяет в некоторых случаях получить асимптотику логарифма полного числа $\{F\}$-отделимых подмножеств. Тем самым дается сравнительная оценка эффективности работы метода по случаям его применения.

О других результатах информация содержится в соответствующих местах дальнейшего изложения—они необходимы для полного представления об известных подходах и сравнения следующих из них выводов. Для этого будут нужны следующие два результата. Ниже полагается $\binom{0}{0} = 1$ и $\binom{a}{b} = 0$ при $a < b$.

Теорема Шлефли ([10]). *Если $m \geqslant 1$ гиперплоскостей проходят через начало координат евклидова пространства R^{q+1}, $q \geqslant 0$, то пространство делится самое большее на $2 \cdot \sum_{i=0}^{q} \binom{m-1}{i}$ областей.*

Утверждение Шлефли затем было передоказано Уайндером и другими (см. в ([11, 12])).

Теорема Одлыцко ([13]). *Если $p \leqslant n(1-10\ln^{-1}n)$ и ± 1 векторы $v_1, \ldots, v_p$ длины n выбраны случайно, то вероятность того, что натянутое на них линейное подпространство содержит ± 1 векторов, отличных от $\pm v_1, \ldots, \pm v_p$, при $n \to \infty$ составляет* $4\binom{p}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n + O\left(\left(\frac{7}{10}\right)^n\right)$.

1. В тексте рассматриваются непустые конечные множества A и вещественнозначные функции (отображения), определенные в исследуемом конечном множестве.

Рассмотрим системы неравенств

$$1)\ \begin{cases} F(x) \geqslant 0, & \text{при } x \in A_0 \\ F(x) < 0, & \text{при } x \in A \setminus A_0; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} F(x) > 0, & \text{при } x \in A_0 \\ F(x) \leqslant 0, & \text{при } x \in A \setminus A_0; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} F(x) \leqslant 0, & \text{при } x \in A_0 \\ F(x) > 0, & \text{при } x \in A \setminus A_0; \end{cases} \qquad 4)\ \begin{cases} F(x) < 0, & \text{при } x \in A_0 \\ F(x) \geqslant 0, & \text{при } x \in A \setminus A_0; \end{cases}$$

$$5)\ \begin{cases} F(x) > 0, & \text{при } x \in A_0 \\ F(x) < 0, & \text{при } x \in A \setminus A_0; \end{cases} \qquad 6)\ \begin{cases} F(x) < 0, & \text{при } x \in A_0 \\ F(x) > 0, & \text{при } x \in A \setminus A_0. \end{cases}$$

Пусть $M^{(\sigma)}(\{F\}, A)$, $\sigma \in \{\overline{1, 6}\}$, есть множество всех подмножеств $A_0 \subseteq A$, для которых в множестве функций $\{F\}$ разрешима система σ), а $M^{(\sigma)}(\{F\}, A, p)$ — множество всех таких подмножеств мощности p, $0 \leqslant p \leqslant |A|$.

Пусть $A_0 \subseteq A$ и $\varphi_{A_0}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A_0 \\ -1, & \text{если } x \in A \setminus A_0. \end{cases}$

Лемма 1. $A_0 \in M^{(\sigma)}(\{F\}, A)$, $\sigma \in \{5, 6\}$, *тогда и только тогда, когда в множестве $\{F\}$ разрешима система*

$$\begin{cases} F(x) \cdot \varphi_{A_0}(x) = (-1)^{\sigma-1} \cdot |F(x)| \\ F(x) \neq 0 \end{cases}; \quad \textit{для всех } x \in A.$$

Лемма 2. $A_0 \in M^{(\sigma)}(\{F\}, A)$, $\sigma \in \{5, 6\}$, *тогда и только тогда, когда в множестве $\{F\}$ разрешима система*

$$\begin{cases} \sum\limits_{x \in A_0} F(x) - \sum\limits_{x \in A \setminus A_0} F(x) = (-1)^{\sigma-1} \sum\limits_{x \in A} |F(x)| \\ F(x) \neq 0, \quad \textit{при } x \in A. \end{cases}$$

Пусть $\{g\}=\{g_1,\ldots,g_r\}$, $r\geqslant 1$, — заданное множество функций, $T\subset R^r$ — заданное множество и $\{G_s\}^T=\left\{\sum_{t=1}^{r}a_t g_t/(a_1,\ldots,a_r)\in T\right\}$.

Лемма 3. $A_0\in M^{(s)}(\{G_s\}^T,\ A)$, $s\in\{5,6\}$, *тогда и только тогда, когда система*

$$\begin{cases}\sum_{t=1}^{r}\left|\sum_{x\in A_0}g_t(x)-\sum_{x\in A\setminus A_0}g_t(x)\right|a_t=(-1)^{s-1}\sum_{x\in A}\left|\sum_{t=1}^{r}a_t g_t(x)\right|\\ \sum_{t=1}^{r}a_t g_t(x)\neq 0 \quad \text{при } x\in A\end{cases}$$

имеет решение $(a_1,\ldots,a_r)\in T$.

Теорема 1. *Пусть* $s\in\{5,6\}$. *Тогда:* 1) *вектор* $\Omega(\{g\},A_0)=$ $=(\sum_{x\in A_0}g_1(x),\ldots,\sum_{x\in A_0}g_r(x))$ *содержит полную информацию о принадлежности* $A_0\in M^{(s)}(\{G_s\}^T,\ A)$; 2) *если* $A_1,A_2\in M^{(s)}(\{G_s\}^T,\ A)$ *и* $A_1\neq A_2$, *то* $\Omega(\{g\},A_1)\neq\Omega(\{g\},A_2)$.

Теорема 1 является обобщением теоремы, доказанной Чоу (см. ([7])) относительно пороговых булевых функций. Компоненты соответствующего вектора известны как параметры Чоу для булевой функции.

2. Рассмотрим класс $\{F_s\}=\left\{\sum_{t=1}^{q}a_t f_t+b/(a_1,\ldots,a_q,b)\in R^{q+1}\right\}$ — линейное замыкание заданного множества функций $\{f\}=\{f_1,\ldots,f_q,1\}$, $q\geqslant 0$.

Лемма 4. *Пусть* $1\leqslant i,j\leqslant 6$ *и* $0\leqslant p\leqslant |A|$. *Тогда*:

1) $M^{(i)}(\{F_s\},A,p)=M^{(j)}(\{F_s\},A,p)\overset{\mathrm{df}}{=}M(\{F_s\},A,p)$.

2) $M^{(i)}(\{F_s\},A)=M^{(j)}(\{F_s\},A)\overset{\mathrm{df}}{=}M(\{F_s\},A)$.

Пусть $m(f_t,A,p)=\max\limits_{\substack{A_0\subseteq A\\|A_0|=p}}\sum_{x\in A_0}f_t(x)-\min\limits_{\substack{A_0\subseteq A\\|A_0|=p}}\sum_{x\in A_0}f_t(x)+1$,

$m(f_t,A)=\max\limits_{0\leqslant p\leqslant|A|}m(f_t,A,p)$ и $s(f_t,A)$ — количество различных значений функции f_t в A, $t\in\{\overline{1,q}\}$.

Следующие утверждения выводятся на основе теоремы 1 — оцениванием сверху количеств возможных векторов $\Omega(\{f\},A_0)$.

Теорема 2. *Если функции* f_t, $t=\overline{1,q}$, *целочисленны в* A, *то:*

1) $|M(\{F_s\},A,p)|\leqslant\prod_{t=1}^{q}m(f_t,A,p)$, $0\leqslant p\leqslant|A|$;

2) $|M(\{F_s\},A)|\leqslant(|A|-1)\cdot\prod_{t=1}^{q}m(f_t,A)+2$.

Теорема 3. $|M(\{F_s\},A,p)|\leqslant\prod_{t=1}^{q}\binom{p+s(f_t,A)-1}{p}$, $0\leqslant p\leqslant|A|$.

Подход к установлению последнего неравенства использует ([6]) некоторые методы разбиения натурального числа, что позволяет при возможности получить улучшения теоремы 3.

Свои варианты теоремы Шлефли, Уайндер и др. использовали для установления верхней оценки полного числа пороговых булевых функций. Замеченные в ([12]) широкие возможности использования этих утверждений легко получают дальнейшее распространение в виде следующего неравенства $|M(\{F_\lambda\}, A)| \leq 2 \cdot \sum_{t=0}^{q} \binom{|A|-1}{t}$. В отличие от этого описанный здесь метод позволяет получить верхние оценки как для числа $\{F_\lambda\}$-отделимых подмножеств, имеющие заданные мощность и (или) структуру, так и для полного их числа. При конкретизации рассмотрений относительно исходного множества A $(\subset R^n)$, класса $\{F_\lambda\}$, мощности исследуемых подмножеств, этот метод в ряде случаев приводит к более сильным оценкам, чем оценки, непосредственно следующие из теорем 2, 3 и приведенного выше неравенства ([1–6]).

Отметим, что оценка $\log_2 \left| M\left(\left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b \right\}, \{0, 1\}^n \right) \right| \leq n^2$ позже была получена также Нечипоруком ([14]) независимо от теоремы Шлефли.

3. Перейдем к описанию индуктивного метода получения нижних оценок для количеств функционально-отделимых подмножеств.

Пусть $\varnothing \neq I \subseteq \{\overline{1, 6}\}$, $M^{(I)}(\{F\}, A) = \bigcup_{i \in I} M^{(i)}(\{F\}, A)$ и $M^{(I)}(\{F\}, A, p) = \bigcup_{i \in I} M^{(i)}(\{F\}, A, p)$, $0 < p < |A|$.

Лемма 5. *Пусть* $B \subseteq A$. *Тогда* $|M^{(I)}(\{F\}, A)| = \sum_{C_0 \in M^{(I)}(\{F\}, B)} m(\{F\}, I, C_0, B, A)$, *где* $m(\{F\}, I, C_0, B, A)$ *— количество подмножеств* $A_0 \subseteq A \setminus B$ *таких, что* $A_0 \cup C_0 \in M^{(I)}(\{F\}, A)$.

Пусть $B_r \subseteq B_{r-1} \subseteq \ldots \subseteq B_1 \subseteq B_0 \equiv A$, $r \geqslant 1$, и $m(\{F\}, I, C_0, B_i, B_{i-1}) \geqslant m_i$ при любом $C_0 \in M^{(I)}(\{F\}, B_i)$, $i = \overline{1, r}$.

Следствие. $|M^{(I)}(\{F\}, A)| \geqslant m_1 \cdot \ldots \cdot m_r \cdot |M^{(I)}(\{F\}, B_r)|$.

Лемма 6. *Пусть* $B \subseteq A$, $s_0 = \min\{p, |B|\}$ *и* $t_0 = \max\{0, p + |B| - |A|\}$. *Тогда* $|M^{(I)}(\{F\}, A, p)| = \sum_{j=t_0}^{s_0} \sum_{C_0 \in M^{(I)}(\{F\}, B, j)} m(\{F\}, I, C_0, B, A, p-j)$, *где* $m(\{F\}, I, C_0, B, A, p-j)$ *— количество подмножеств* $A_0 \subseteq A \setminus B$ *таких, что* $A_0 \cup C_0 \in M^{(I)}(\{F\}, A, p)$.

Скажем, что относительно пары $B \subseteq A$ множество функций $\{F\}$ обладает свойством $I(1)$, если для всякого $C_0 \in M^{(I)}(\{F\}, B)$ существует отделяющая его в B (по некоторой системе из I) функция $F_0 \in \{F\}$, принимающая $|A| - |B|$ различных значений в $A \setminus B$.

Лемма 7. *Пусть:* 1) $\{G\} \neq \varnothing$ *— заданное множество функций, а функция* f *— двузначна в* A *и постоянна в каждом из множеств* $B (\subseteq A)$ *и* $A \setminus B$; 2) *класс* $\{F\} = \{G + af + b / G \in \{G\}, (a, b) \in R^2\}$ *относительно пары* $B \subseteq A$ *обладает свойством* $I(1)$. *Тогда:*

1) $|M^{(I)}(\{F\}, A)| \geqslant (|A| - |B| + 1) \cdot |M^{(I)}(\{F\}, B)|$;

2) $|M^{(1)}(\{F\}, A, p)| \geqslant \sum\limits_{i=t_0}^{s_0} |M^{(1)}(\{F\}, B, i)|$, *где* s_0 *и* t_0 *определены как в лемме* 6.

Нижеследующее утверждение считается основным для данного пункта.

Пусть $B_n \subseteq B_{n-1} \subseteq \ldots \subseteq B_1 \subseteq B_0 = A$, $n \geqslant 1$; $s_i = \min\{p_{i-1}, |B_i|\}$, $t_i = \max\{0, p_{i-1} + |B_i| - |B_{i-1}|\}$, где $i \in \{\overline{1, n}\}$ и $p_0 = p$, $0 \leqslant p \leqslant |A|$. Пусть также $\{G\} \neq \varnothing$ и $\{f_1, \ldots, f_n\}$ — заданные множества функций и $\{F\} = \left\{G + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i f_i + b \,/\, G \in \{G\}, (a_1, \ldots, a_n, b) \in R^{n+1}\right\}$.

Теорема 4. *Пусть: 1) для любого* $i \in \{\overline{1, n}\}$ *функция* f_i *двузначна в* B_{i-1} *и постоянна в каждом из множеств* B_i *и* $B_{i-1} \setminus B_i$; *2) относительно каждой из пар* $B_i \subseteq B_{i-1}$, $i = \overline{1, n}$, *класс* $\{F\}$ *обладает свойством* $I(1)$. *Тогда:*

1) $|M^{(1)}(\{F\}, A)| \geqslant |M^{(1)}(\{F\}, B_n)| \cdot \prod\limits_{i=1}^{n} (|B_{i-1}| - |B_i| + 1)$;

2) $|M^{(1)}(\{F\}, A, p)| \geqslant \sum\limits_{p_1=t_1}^{s_1} \sum\limits_{p_2=t_2}^{s_2} \ldots \sum\limits_{p_n=t_n}^{s_n} |M^{(1)}(\{F\}, B_n, p_n)|$.

Пункт 1 заключения теоремы 4 является обобщением основополагающих утверждений работ ([8, 9]), рассматривающих случай: $\{G\} \equiv \{0\}$, $f_i = x_i$ при $i = \overline{1, n}$, $A = \{0, 1\}^n$. Несколько отличные от соответствующего случая пункта 2 утверждения (полученные исходя из однородности структур искомых подмножеств) были применены в ([15]) к оцениванию снизу величины

$$\log_2 \left| M\left(\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b\right\}, \{0, 1\}^n, p\right)\right|.$$

Возможности использования теоремы Одлыцко замечены в ([16]), где показано, что при $n \to \infty$ имеет место неравенство

$$n^2 (1 - 10 \ln^{-1} n) \lesssim \log_2 \left| M\left(\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b\right\}, \{0, 1\}^n\right)\right|.$$

Здесь отметим, что числа

$$\left| M\left(\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b\right\}, A\right)\right| \quad \text{и} \quad \left| M\left(\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b\right\}, A, p\right)\right|$$

не зависят от выбора множества $A = S_1 \times \cdots \times S_n \subset R^n$, где $|S_i| = 2$ при $i = \overline{1, n}$, ([5, 6]).

Сформулированные выше утверждения указывают на принципиально новые возможности применения индуктивного метода. Так, пусть в условиях теоремы 4 множество $\{G\}$ состоит лишь из одной функции, принимающей $|B_n|$ различных значений в B_n, и $|B_{i-1}| - |B_i| = \left[\dfrac{|A|}{n+1}\right]$ при $i = \overline{1, n}$. Тогда $|M^{(1)}(\{F\}, B_n)| > \dfrac{|A|}{n+1}$, и потому из теоремы 4 и утверждения Шлефли получим

$$\left(\frac{|A|}{n+1}\right)^{n+1} < |M^{(I)}(\{F\}, A)| \leqslant 2\cdot\sum_{i=0}^{n+1}\binom{|A|-1}{i}.$$

Следовательно, если в рамках упомянутых условий $|A|\to\infty$, $n\to\infty$ и $\ln n = o(\ln|A|)$, то $\ln|M^{(I)}(\{F\}, A)| \sim (n+1)\ln|A|$.

Несколько развивая рассуждения, для максимально возможной мощности $m(A) = \max|M^{(I)}(\{F\}, A)|$ (отыскиваемой относительно всевозможных цепочек вложений $B_n\subseteq B_{n-1}\subseteq\cdots\subseteq B_1\subseteq B_0 = A$, $n\in N$, и соответствующих им по условиям примера множеств $\{G\}$ и $\{F\}$. Возможность таких выборов подтверждается в пункте 4 настоящей работы) получим $m(A) > e^{|A|/e-1}$.

Рассмотрим другой пример. Пусть в условиях теоремы 4 имеем: $|A| = 2^n$, $2|B_i| = |B_{i-1}|$ при $i=\overline{1, n}$, $\{G\} = \{0\}$. Тогда из пункта 1 ее заключения получим $|M^{(I)}(\{F\}, A)| \geqslant 2\cdot\prod_{i=1}^{n}(2^{i-1}+1)$, а затем из пункта 2 — $|M^{(I)}(\{F\}, A, p)| \geqslant 2\cdot\sum_{i=1}^{[\log_2 p]}(2^{i-1}+1)$, $2\leqslant p\leqslant 2^{n-1}$.

4. Скажем, что множество функций $\{F\}$ в A обладает свойством $I(2)$, $\varnothing\neq I\subseteq\{\overline{1, 6}\}$, если для всякого $A_0\in M^{(I)}(\{F\}, A)$ существует отделяющая его по некоторой системе из I функция $F_0\in\{F\}$, принимающая $|A|$ различных значений в A.

Теорема 5. *Класс $\{F_q\}$ в A обладает свойством $I(2)$ при любом $I\subseteq\{\overline{1, 6}\}$, если и только если не существуют различные элементы $x, y\in A$ такие, что $f_t(x) = f_t(y)$* при $t=\overline{1, q}$.

Теорема 6. *Пусть*: 1) *класс $\{F\}$ определен как перед теоремой* 4; 2) $\{F\}$ *удовлетворяет исходному условию* 1 *теоремы* 4; 3) *для любого $i\in\{\overline{1, n}\}$* (*если* $n\geqslant 2$) *и для любых различных $x, y\in B_{i-1}\setminus B_i$ существует функция f_j, $i<j\leqslant n$, такая, что $f_j(x)\neq f_j(y)$*: 4) *для любого $C_0\in M^{(I)}(\{F\}, B_n)$ существует отделяющая его по некоторой системе из I функция $G_0+\sum_{i=1}^{n}a_i^{(0)}f_i+b^{(0)}$, принимающая $|B_{n-1}|-|B_n|$ различных значений в $B_{n-1}\setminus B_n$. Тогда $\{F\}$ удовлетворяет исходному условию* 2 *теоремы* 4.

Вычислительный центр Академии наук Армении
и Ереванского государственного университета

Ռ. Ն. ԹՈՐՈՍՅԱՆ

Վերջավոր բազմության ֆունկցիոնալ-անջատելի ենթաբազմությունների քանակների գնահատականներ

Աշխատանքը ներկայացնում է հեղինակի և ուրիշների կողմից նախկինում ստացված արդյունքների զարգացումը և դրանց հնարավորությունների տարածումը կամայական վերջավոր բազմությունների վրա

Դիցուք A-ն կամայական վերջավոր բազմություն է։ $A_0 \subseteq A$ ենթաբազմությունը կոչվում է $\{F\}$-անջատելի A-ում, եթե A_0 և $A \setminus A_0$ բազմությունները կարելի է տարբերել՝ A-ում որոշված և իրական, որևէ $F_0 \in \{F\}$ ֆունկցիայի (արտապատկերման) նշաններով և զրոներով, որտեղ $\{F\}$-ը ֆունկցիաների տրված բազմություն է։ Այստեղ հիմնականում զարգացվում է նշված տիպի ենթաբազմությունների քանակների՝ համապատասխանաբար վերին և ներքին գնահատականների ստացման երկու մոտեցում։ Երկու մոտեցումն էլ թույլ են տալիս ստանալ գնահատականներ ինչպես տված հզորություն ունեցող նշված տիպի ենթաբազմությունների քանակի համար, այնպես նաև դրանց լրիվ քանակի համար։

Մոտեցումներից մեկը առաջին անգամ նկատվել ([1]) և հետագայում զարգացվել ([2–6]) է հեղինակի կողմից։ Այն կիրառվում է վերին գնահատականների ստացմանը։ Մյուսը զարգացնում է շեմքային բուլյան ֆունկցիաների լրիվ քանակի ներքին գնահատականի ստացմանը՝ ([8, 9]) աշխատանքներում կիրառված հայտնի ինդուկտիվ մեթոդը։ Ներկա աշխատանքում ստացված արդյունքները հնարավորություն են տալիս որոշակի և բավականաչափ ընդհանուր պայմանների դեպքում ստանալ նշված քանակների լոգարիթմների ասիմպտոտիկան։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Б. Е. Торосян*, Юбилейная конференция молодых ученых, посвящ. 60-летию образования СССР. Тезисы докл., Ереван. с. 60, 1982. [2] *Б. Е. Торосян*, VI Всесоюзная конференция по проблемам теоретической кибернетики, Тезисы докл., Саратов. 1983. [3] *Б. Е. Торосян*, ДАН АрмССР, т. 84, № 2. с. 61—66 (1987). [4] *Б. Е. Торосян*, ДАН АрмССР, т. 87, № 4. с. 147—151 (1988). [5] *Б. Е. Торосян*, ДАН АрмССР, т. 88, № 2, с. 61—64 (1989). [6] *Б. Е. Торосян*, ДАН АрмССР, т. 89. № 1. с. 3—8 (1989). [7] *М. Л. Дертоузос*, Пороговая логика, Мир, М., 1967. [8] *М. Блох, Я. Моравек* Кибернетический сборник, Новая сер., вып 6. Мир, М.. с. 82—88 (1969). [9] *С. Яджима, Т. Ибараки*, Кибернетический сб. Новая сер., вып. 6. Мир. М., с. 72—81 (1969). [10] *L. Schläfli*, Switzerland, Werlag Birkhäuser, p. 209—212 (1950). [11] *R. O. Winder*, IEEE Trans. on El. Comp., EC-12, № 3, p. 561—564 (1963). [12] *T. M. Cover*, IEEE Trans. on El. Comp., EC-14. № 3, p. 326—334 (1965). [13] *A. M. Odlyzko*, J. Combin. Theory, A. v. 47, № 1, p. 124—133 (1988). [14] *Э. И. Нечипорук*, Проблемы кибернетики, вып. 11, Наука. М., с. 49—62 (1964). [15] *Ю. А. Зуев, Л. И. Липкин*, Изв. АН СССР. Техн кибернетика, № 3, с. 79—85, 1988 [16] Ю. А. Зуев, ДАН СССР, т. 306, № 3, с. 528—530 (1989).