

МАТЕМАТИКА

УДК 519.64

Член-корреспондент АН Армении А. Б. Нерсисян, Ш. А. Багдасарян

О повышении устойчивости алгоритма быстрого решения  
 одного класса интегральных уравнений

(Представлено 11/VII 1990)

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$y(x) = \int_0^1 K(x, t)y(t)dt + f(x), \quad (1)$$

где  $y, f$  — вектор-функции размерности  $r$  ( $r \geq 1$ ),  $K$  — матрица-функция ( $r \times r$ ), удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$A \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial K(x, t)}{\partial t} A = 0, \quad (2)$$

где  $A$  — постоянная матрица.

В работе (1) доказано, что в случае обратимости оператора  $J - K$  ядро резольвенты  $(J - K)^{-1} = J + R$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$A \frac{\partial}{\partial x} R(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} R(x, t) A = R(x, 0)AR(0, t) - R(x, 1)AR(1, t). \quad (3)$$

В работе (2) предложен алгоритм для рекуррентного приближенного вычисления решения общего уравнения вида (1). В простейшем случае дискретизируя уравнение (1) в  $N$  точках ( $N \geq 2$ ,  $h = 1/N$ ) имеем следующий алгоритм точности  $O(h)$  ( $N \rightarrow \infty$ ), ( $y(x, 0) = f(x)$ ,  $y(x, N) = y(x)$ ,  $R(x, t, 0) = K(x, t)$ ):

$$y(x, n+1) = y(x, n) + hR(x, n, n)y(n, n+1); \quad (4)$$

$$R(x, t, n+1) = R(x, t, n) + hR(x, r, n)R(n, t, n+1). \quad (5)$$

$$(0 \leq n \leq N-1).$$

т. е. для определения  $y(x, n+1)$  надо знать  $y(x, n)$  и  $R(x, n, n)$ .

Подставив  $t = n+1$  в (5), получим

$$R(x, n+1, n+1) = R(x, n+1, n) + hR(x, n, n)R(x, n+1, n+1). \quad (6)$$

Для вычисления  $R(x, n+1, n)$  воспользуемся формулой Тейлора и соотношением (3):

$$R(x, n+1, n) = R(x, n, n) + hR(x, 0, n)AR(0, n, n)A^{-1} - \\ - hR(x, n, n)AR(n, n, n)A^{-1} + \\ + A[R(x-h, n, n) - R(x, n, n)]A^{-1},$$

$x = 1, 2, \dots, N$  а для определения  $R(0, n+1, n)$  вычисляются  $R(0, t, n+1), R(n+1, t, n+1)$  ( $t = n+1, n+2, \dots, N$ ) по формулам, полученным из формул (5), (3).

Построенный таким образом алгоритм экономичен, так как при вычислительном эксперименте используется оперативная память лишь для восьми трехмерных  $(r \times r) \times N$ -массивов ( $R(x, n, n), R(x, n+1, n+1), R(x, 0, n), R(x, 0, n+1), R(0, t, n), R(0, t, n+1), R(n, t, n), R(n+1, t, n+1)$ ) и для двух двумерных  $r \times N$ -массивов ( $y(x, n), y(x, n+1)$ ), а сложность алгоритма равна  $O(N^3)$  при точности  $O(N^{-1})$ . Заметим, что обычные общие подходы к уравнению (1) при дискретизации решения в  $N$  точках требуют значительно большего объема оперативной памяти (порядка  $O(N^3)$ ) и имеют сложность  $O(N^3)$  ( $N \rightarrow \infty$ ).

К сожалению, алгоритм этот, вообще говоря, неустойчив. Именно лишь в случае  $A=E$  ( $E$ —единичная матрица) получаем сильно устойчивый алгоритм (3). Если же  $A \neq E$ , то возникает проблема устойчивости вычисления. Ниже мы покажем, как можно подойти к повышению устойчивости алгоритма в случае  $A = \text{diag}\{1, \sigma\}$ , т. е. при  $r=2$  в (1).

Вычислительный эксперимент проведен для ядра:

$$K(x, t) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} e^{-0,1(x-t)^2} & \lambda_{12} e^{0,1(\sigma x-t)^2} \\ \lambda_{21} e^{-\frac{0,1}{\sigma^2}(x-\sigma t)^2} & \lambda_{22} e^{\sigma,1(x-t)^2} \end{pmatrix}$$

при разных значениях  $\lambda_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) в следующих случаях:

а)  $\sigma = 2^{-k}, \quad k = 0, 1, 2, 3;$

б)  $\sigma = (1,5i, 0,25i);$

в)  $\sigma = 1 + \frac{l}{2^k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$

г)  $\sigma = 2^{-k} + \frac{l}{2^l}, \quad k = 1, 2, 3, \quad l = 1, 4.$

Некоторые результаты расчетов содержатся в табл. 1—5, в которых приведена абсолютная среднеквадратическая ошибка ( $N$ —число отрезков равномерного разбиения интервала  $(0, 1)$  ( $h = \frac{1}{N}$ )). В табл. 3—5  $\lambda_{ij}$  те же, что и в табл. 2. Результаты показывают, что в случае а)

при  $k=0, 1, 2$ ; б) при  $k=0, 1, 2$  и г) алгоритм явно неустойчив, и именно при увеличении  $N$  точность сначала увеличивается, а затем резко падает. Для относительно устойчивого вычисления использована схема

$$\frac{\partial}{\partial x} R(x, t) = \frac{R(x, t) - R(x - mh, t)}{mh}$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} R(x, t) = \frac{R(x, t) - R(x, t - mh)}{mh} \right)$$

$(m = 1, 2, 3, 4).$

При  $m > 2$  несколько улучшается устойчивость алгоритма, т. е. падение точности, как правило, происходит при больших  $N$  (см. табл. 1). Отметим что (см. табл. 1) в случае  $\sigma=2$  значения  $N=128, 256$  не обсчитывались при  $m=1$ , так как при  $N=64$  уже произошло переполнение. Влияние  $m$  на точность результатов более подробно можно проследить в диаграммах (рис. 1, 2), на которых приведена среднеквадратичная ошибка  $\delta$ , а знак  $\delta = \infty$  соответствует переполнению при данном  $N$ . Как правило, при  $m=3, 4$  точность результатов не улучшается по сравнению с  $m=2$ . При приближении  $\sigma$  к 1 явно улучшается устойчивость алгоритма (табл. 2-4), но в этом случае при  $m > 2$  точность результатов существенно не увеличивается (табл. 4, графа  $k=3, k=4$ ).

Таблица 1

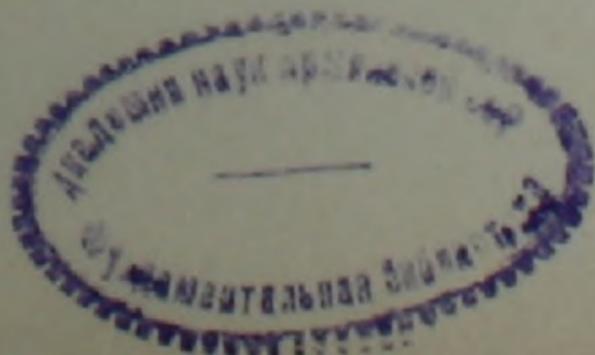
$N$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$
4	$4.87E-03$	$7.01E-03$	$8.68E-03$	$9.40E-03$
8	$2.72E-03$	$3.46E-03$	$4.45E-03$	$5.28E-03$
16	$4.34E-01$	$1.70E-03$	$2.22E-03$	$2.70E-03$
32	$1.67E+07$	$8.9E-04$	$1.12E-03$	$1.37E-03$
64	OVERFLOW	$4.77E-04$	$6.01E-04$	$7.25E-04$
128		$3.41E-04$	$3.95E-04$	$4.48E-04$
256		$3.35E-04$	$3.44E-04$	$3.31E-04$

$$\sigma = 2, \lambda_{11} = -0.5, \lambda_{12} = -0.25, \lambda_{21} = -0.25, \lambda_{22} = -0.5$$

Таблица 2

$m$	$k=0 (N=256)$	$k=1 (N=128)$	$k=2 (N=128)$	$k=3 (N=128)$
1	OVERF. (64)	OVERF. (128)	$1.69E-05$	$8.24E-03$
2	$1.20E-02$	$7.3E-03$	$5.35E-03$	$4.87E-03$
3	$1.24E-02$	$7.66E-03$	$6.29E-03$	$5.45E-03$
4	$1.26E-02$	$8.00E-03$	$6.85E-03$	$6.58E-03$

$$\sigma = 2^{1/2}, \lambda_{11} = 0.5, \lambda_{12} = 0.25, \lambda_{21} = 0.25, \lambda_{22} = 0.5$$



Результаты показывают, что когда  $K(x, t)$  — комплекснозначная матрица, устойчивость улучшается по сравнению с чисто действительной матрицей с той же величиной  $|1-\sigma|$ .

Таблица 3

$m$	$\sigma = 0,5i (N=32)$	$\sigma = 0,25i (N=16)$
1	$1,89E+17$	$1,11E+11$
2	OVERFLOW	$1,01E+11$
3	$1,47E+18$	$2,57E+13$

Таблица 4

$m$	$k=8 (N=32)$	$k=1 (N=128)$	$k=2 (N=128)$	$k=3 (N=128)$	$k=4 (N=128)$
1	$3,72E+03$	OVERFLOW	$8,79E+02$	$2,80E-04$	$2,45E-04$
2	$7,87E-03$	$4,23E-02$	$3,16E-03$	$4,35E-03$	$4,65E-03$
3	$2,53E-03$	$2,29E-03$	$4,65E-03$	$5,57E-03$	$5,80E-03$

$$\sigma = 1 + \frac{i}{2^k}$$

Таблица 5

$m$	$k=1$		$k=2$		$k=3$	
	$l=1 (N=128)$	$l=2 (N=128)$	$l=1 (N=128)$	$l=1 (N=128)$	$l=1 (N=128)$	$l=4 (N=128)$
1	OVERFLOW	OVERFLOW	OVERFLOW	$6,95E+05$	OVERFLOW	$1,03E-01$
2	$8,61E-03$	$7,04E-03$	$3,28E-03$	$5,32E-03$	$3,07E-02$	$4,81E-03$
3	$8,61E-03$	$7,65E-03$	$6,60E-03$	$6,26E-03$	$4,93E-03$	$5,89E-03$

$$\sigma = 2^{1/k} + \frac{i}{2^l}$$

Заметим, что алгоритм (4) — (5) низкой точности  $O(h)$  специально выбран для выявления эффектов неустойчивости при малых  $N$ . Алгоритмы большей точности (см. (2)) более пригодны на практике, но уже ясно, что можно рекомендовать производные считать с большим шагом, например  $2h$ . При применении алгоритма порядка  $O(h^2)$  на основе формулы трапеций (см. (2), алгоритм 3) в случае  $\sigma=2$  и  $m=1$  наименьшая среднеквадратичная ошибка  $\delta (\approx 5,1 E-4)$  получена в случае  $N=4$  (при  $N=64$ ,  $\delta \approx 1,5 E+7$ , а при  $N=128$  — переполнение), в то время как при  $m=2$  наилучший результат получен при  $N=128$  ( $\delta \approx 5,85 E-4$ ), а при  $N=64$  ошибка примерно такая же ( $\delta \approx 5,9 E-4$ ).

В отношении применимости этих относительно устойчивых алгоритмов при повышенных требованиях к точности можно сказать, что они хорошо приспособлены в качестве поставщиков первого приближения для итерационных методов (скажем, при  $\|K\| < 1$ ).

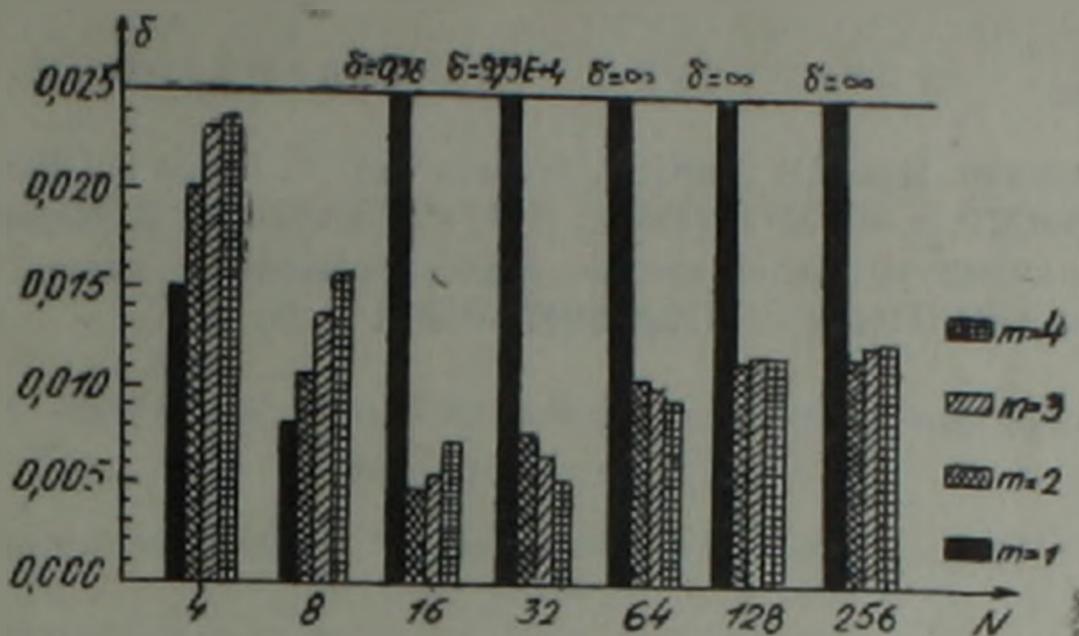


Рис. 1.  $\sigma=2$ ;  $\lambda_{11}=0,5$ ;  $\lambda_{12}=0,25$ ;  $\lambda_{21}=0,25$ ;  $\lambda_{22}=0,5$

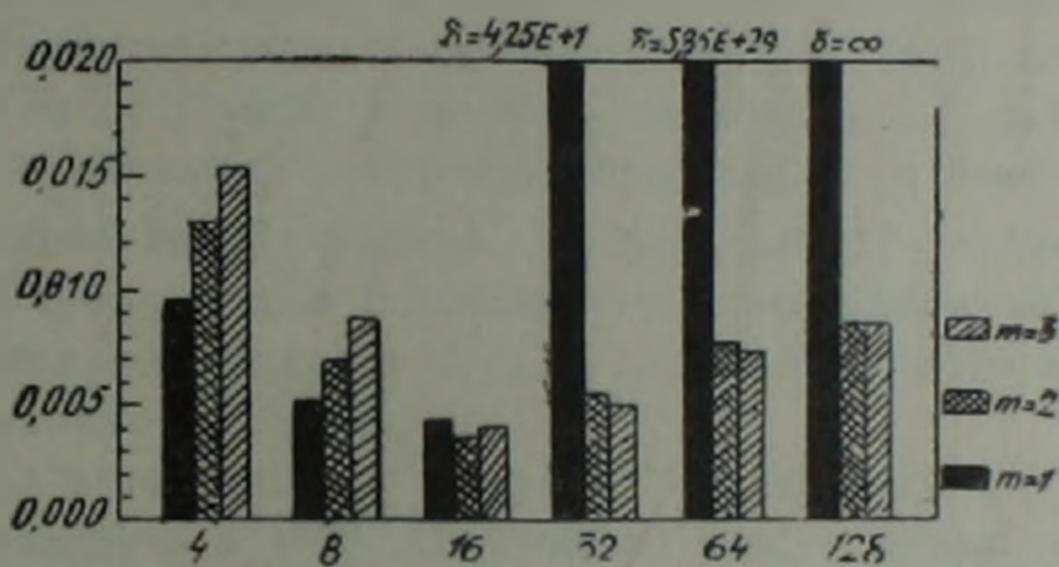


Рис. 2.  $\sigma=2^{1/2}+1/2$ ;  $\lambda_{11}=0,5$ ;  $\lambda_{12}=0,25$ ;  $\lambda_{21}=0,25$ ;  $\lambda_{22}=0,5$

В заключение отметим, что в уравнении (2) матрица  $A$  выбрана постоянной (даже диагональной) только ради простоты выкладок. Результаты дают основание предполагать, что и в случае уравнения типа (2) с переменными матрицами (см. (1)) будет наблюдаться тот же эффект. Соответствующий численный эксперимент проводится.

Алгоритм реализован на ЭВМ ЕС—1033 на языке ПЛ—1.

Институт математики Академии наук Армении  
Ереванский государственный университет

Հայաստանի ԳԱ քղբակից անդամ Հ. Բ. ՆԵՐՍԻՍՅԱՆ, Շ. Ա. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ

Մի դասի ինտեգրալ հավասարումների արագ լուծման ալգորիթմի կայունության բարձրացման մասին

Դիտարկվում է (2) առնչությանը բավարարող  $K$  կորիզների դեպքում (1) ինտեգրալ հավասարման թվային լուծման խնդիրը: (3)—(5) առնչու-

թյունների հիման վրա առաջարկվում է արագ (սովորական եղանակներից ավելի քիչ գործողություններ պահանջող) այգորիթմ և քննարկվում են նրա կայունությունը լավացնող եղանակներ: Բերված են թվային արդյունքներ:

#### ЛИТЕРАТУРА — ՓՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 А. Б. Нерсисян. Изв. АН АрмССР, Математика т. 17, № 6 (1982). 2 А. Б. Нерсисян, ДАН АрмССР, т. 89, № 4, (1989). 3 А. Б. Гарибян, А. Б. Нерсисян, Численные решения интегральных уравнений второго рода с разностным ядром. Рукопись депонирована в Арм. НИИНТИ, 8. 01. 1990. ДЕП от № 1 ар-90, 20 с.