

УДК 517.927.21

Г. М. Айрапетян

Граничные задачи типа Римана—Гильберта
для уравнения Бицадзе в классах L^p ($p \geq 1$)

(Представлено чл.-корр. АН Армении А. Б. Нерсисяном 11/VII 1990)

1. Пусть D —единичный круг в комплексной плоскости $z=x+iy$, T —единичная окружность, $C^{1+\mu}(T)$ —класс функций, определенных на T , производные которых принадлежат классу Гельдера с показателем μ . Через $\bar{C}^{1+\mu}(T)$ обозначим класс функций, определенных на T , имеющих разрыв в конечном числе точек и принадлежащих классу $C^{1+\mu}$ на каждой дуге окружности T , соединяющей соседние точки разрывов.

Граничные задачи типа Римана—Гильберта для уравнения Бицадзе

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2} = 0, \quad z \in D \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial z} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (1)$$

а также для уравнений неправильно-эллиптического типа с постоянными коэффициентами высших порядков в классах Гельдера исследованы в работах (1-7) и др.

В настоящей статье исследуется граничная задача типа Римана—Гильберта для уравнения (1) в классах $L^p(T)$ ($p \geq 1$) в следующей постановке: найти решение уравнения (1), которое удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 1-0} \| \operatorname{Re} z_0(t) u(rt) - f_0(t) \|_p &= 0, \\ \lim_{r \rightarrow 1-0} \| \operatorname{Re} z_1(t) \frac{\partial u(rt)}{\partial r} - f_1(t) \|_p &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $f_0(t) \in L^p(I)$, $f_1(t) \in L^p(T)$ —действительные функции на T , $z_0(t) \neq 0$, $z_1(t) \neq 0$, $z_0(t) \in C^{1+\mu}(T)$, $z_1(t) \in C^{1+\mu}(T)$.

В работе доказывается нетеровость этой задачи. Определяется число линейно независимых решений однородной задачи (1)—(2) и вычисляется индекс.

Везде линейная независимость понимается над полем действительных чисел.

2. Если $x_0 = \ln \overline{a_0(t)} (z_0(t))^{-1}$, то положим

$$S_0(z) = \beta_0 \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{d_0(\tau)}{\tau - z} d\tau \right), \quad \bar{z} \in D,$$

где

$$d_0(t) = \ln(t^{-1} \overline{a_0(t)} (z_0(t))^{-1}),$$

$$\beta_0 = \exp \left(-\frac{1}{4\pi} \int_T \frac{d_0(\tau)}{\tau} d\tau \right).$$

Пусть $t_1, t_2, \dots, t_n$ — точки разрыва функции $a_1(t)$. Полагая $d_1(t) = \ln(\overline{a_1(t)} (z_1(t))^{-1})$, где под этой функцией подразумевается любое определенное значение логарифма, непрерывно изменяющееся на каждой дуге $t_k t_{k+1}$ ($t_{n+1} = t_1$) окружности T , обозначим $\gamma_k + i\nu_k = (2\pi i)^{-1} (d_1(t_k - 0) - d_1(t_k + 0))$. Если $p \geq 1$ произвольное число, то через $T(p)$ обозначим подмножество множества $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, состоящее из точек t_k , где имеет место равенство $(1 - \{\gamma_k\}) p = 1$ ($\{\gamma_k\}$ — дробная часть числа γ_k), а через $T'(p)$ и $T''(p)$ — подмножества, где выполняются неравенства $(1 - \{\gamma_k\}) p < 1$, $(1 - \{\gamma_k\}) p > 1$, соответственно. Выберем целые числа λ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) таким образом, чтобы выполнялись условия $-1 < \lambda_k + \gamma_k \leq 0$, если $t_k \in T(p) \cup T'(p)$, и $0 < \lambda_k + \gamma_k < 1$, если $t_k \in T''(p)$.

Далее обозначим $x_1 = -(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$,

$$S_p(z) = \beta_1 \prod_{k=1}^n (z - t_k)^{\lambda_k} \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{d_1(\tau)}{\tau - z} d\tau \right), \quad z \in D,$$

где

$$\beta_1 = \prod_{k=1}^n (-\bar{t}_k)^{-\lambda_k} \exp \left(-\frac{1}{4\pi} \int_T \frac{d_1(\tau) d\tau}{\tau} \right).$$

Для любого r ($0 < r < 1$) и для любой функции $f'(t) \in L^p$ положим

$$(A_1 f)_r(t) = \frac{S_0'(rt)}{2\pi i} \int_T \frac{f(\tau)}{a_0(\tau) S_0(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - rt}, \quad t \in T,$$

$$(A_2 f)_r(t) = \frac{S_0'(rt)}{2\pi i} \int_T \frac{f(\tau)}{a_0(\tau) S_0(\tau)} \frac{d\tau}{(\tau - rt)^2}, \quad t \in T,$$

$$(A_3 f)_r(t) = \frac{S_0'(rt)}{2\pi i} \int_T \frac{f(\tau)}{a_0(\tau) S_0(\tau)} \frac{d\tau}{(\tau - rt)^3}, \quad t \in T,$$

$$(A_4 f)_r(t) = \frac{S_1'(rt)}{2\pi i} \int_T \frac{f(\tau)}{a_1(\tau) S_1(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - rt}, \quad t \in T,$$

$$(A_5 f)_r(t) = \frac{S_1'(rt)}{2\pi i} \int_T \frac{f(\tau)}{a_1(\tau) S_1(\tau)} \frac{d\tau}{(\tau - rt)^2}, \quad t \in T.$$

Лемма. Существует постоянная C , не зависящая от r и f , такая, что $(1-r^2)\|(A_i f)_r\|_p \leq C(\|f'\|_p + \|f\|_p)$ ($i=1, 2, 3$), $(1-r^2)\|(A_i f)_r\|_p \leq C\|f\|_p$ ($i=4, 5$).

3. Для произвольной функции $f(t) \in L^p(T)$ положим

$$\Phi_j(f; z) = \frac{S_j(z)}{2\pi i} \left\{ \int_T \frac{f(\tau)}{\alpha_j(\tau) S_j(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + z^{x_j} \int_T \frac{\tau^{-x_j} f(\tau)}{\alpha_j(\tau) S_j(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + \right. \\ \left. + z^{x_j} \int_T \frac{\tau^{-x_j} f(\tau)}{\alpha_j(\tau) S_j(\tau)} \frac{d\tau}{\tau} \right\}, \quad (j=0, 1).$$

Далее положим

$$\tilde{x}_j = \max\{x_j - 1; -2\}, \quad x_j' = \max\{-x_j; 2\} \quad (j=0, 1).$$

Теорема 1. Пусть $p \geq 1$ и $T(p) = \emptyset$, если $p > 1$. Тогда

а) Если $\min\{x_0; x_1\} \geq -2$ и $\min\{x_0; x_1\} = -2$ лишь при $x_0 \neq x_1$, то однородная задача (1)–(4) имеет $4 + x_0 + x_1$ линейно независимых решений;

б) Если $\min\{x_0; x_1\} < -2$, то однородная задача (1)–(2) имеет $4 + \tilde{x}_0 + \tilde{x}_1$ линейно независимых решений;

г) Если $x_0 = x_1 = -2$ и $\beta_0^2 = \beta_1^2$, то однородная задача (1)–(2) имеет одно линейно независимое решение;

д) Если $x_0 = x_1 = -2$ и $\beta_0^2 \neq \beta_1^2$, то однородная задача (1)–(2) кроме тривиального других решений не имеет.

Теорема 2. Пусть $p \geq 1$ и $T(p) = \emptyset$, если $p > 1$. Тогда

а) Если $\min\{x_0; x_1\} \geq -2$ и $\min\{x_0; x_1\} = -2$ лишь при $x_0 \neq x_1$ или $x_0 \geq 0$, $x_1 = -3$, то задача (1)–(2) разрешима для любых функций $f_0(t) \in L^p(T)$, $f_1(t) \in L^p(T)$.

Общее решение можно представить в виде

$$u(z) = \varphi_0(z) + (1 - z\bar{z})\varphi_1(\bar{z}) + a_0\bar{z}, \quad (3)$$

где a_0 произвольное комплексное число при $\min\{x_0; x_1\} > -2$ и a_0 удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re} a_0 \beta_k = \frac{1}{4\pi i} \int_T \frac{f_k(\tau)}{\alpha_k(\tau) S_k(\tau)} d\tau$$

при $x_k = -2$, $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z)$ определяются равенствами

$$\varphi_0(z) = \Phi_0(f_0(t); z) - \Phi_0(\operatorname{Re} a_0 \bar{t} a_0(t); z) + S_0(z) P_{x_0}(z), \quad (4)$$

$$\varphi_1(z) = \frac{z}{2} \varphi_0'(z) - \frac{1}{2} (\Phi_1(f_1(t); z) - \Phi_1(\operatorname{Re} a_0 \bar{t} a_1(t); z) + S_1(z) P_{x_1}(z)), \quad (5)$$

причем $P_{x_i}(z)$ — многочлены порядка x_i , коэффициенты которых удовлетворяют условиям $\bar{a}_k^{(i)} = a_{x_i-k}^{(i)}$ и $P_{x_i}(z) \equiv 0$ при $x_i = -2$.

б) Если $\min\{x_0, x_1\} < -2$, или $x_0 = -2$; $x_1 = -3$, то для разрешимости задачи (1)–(2) необходимо и достаточно, чтобы функции $f_0(t)$ и $f_1(t)$ удовлетворяли $x'_0 + x'_1 = 4$ линейно независимым условиям. Общее решение можно представить в виде (3), где $a_0 = 0$, а в формулах (4) и (5) следует полагать $P_{\pm i}(z) \equiv 0$ при $x_i < 0$;

г) Если $x_0 = x_1 = -2$ и $\beta_0^2 = \beta_1^2$, то общее решение можно представить в виде (3), где a_0 определяется по одной из формул

$$\operatorname{Re} a_0 \beta_0 = \frac{1}{4\pi i} \int_T \frac{f_0(\tau)}{a_0(\tau) S_0(\tau)} d\tau, \quad \operatorname{Re} c_0 \beta_1 = \frac{1}{4\pi i} \int_T \frac{f_1(\tau)}{a_1(\tau) S_1(\tau)} d\tau, \quad (6)$$

при этом второе равенство представляет собой единственное линейно независимое условие на правую часть ($f_0(t)$ или $f_1(t)$). В формулах (4) и (5) следует полагать $P_{\pm i}(z) \equiv 0$ ($i = 0, 1$);

д) Если $x_0 = x_1 = -2$ и $\beta_0^2 \neq \beta_1^2$, то задача (1)–(2) разрешима для любых функций $f_0(t) \in L^1(I)$, $f_1(t) \in L^1(T)$. Общее решение можно представить в виде (3), где число a_0 определяется единственным образом из соотношений (6), а в формулах (4) и (5) следует полагать $P_{\pm i}(z) \equiv 0$ ($i = 0, 1$).

При доказательстве теорем 1, 2 помимо хорошо известных результатов относительно задачи Римана–Гильберта в классах Гельдера (см. (8)) используется лемма пункта 2 а также результаты работы (9).

Из теорем 1 и 2 непосредственно следует

Теорема 3. Пусть $p \geq 1$ и $T(p) = \emptyset$, если $p > 1$. Тогда индекс задачи (1)–(2) равен $4 + x_0 + x_1$.

4. Пусть теперь $T(p) \neq \emptyset$. Тогда можно построить пример функции $f_1(t)$, которая будет удовлетворять всем условиям разрешимости задачи (1)–(2), однако функция $u(z)$ из (3) не будет удовлетворять второму условию условий (2), хотя имеет место соотношение

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \operatorname{Re} a_1(t) \frac{\partial u(rt)}{\partial r} = f_1(t), \quad t \in T, \quad t \neq t_k.$$

Исходя из этих соображений в случае $T(p) \neq \emptyset$ естественно второе условие в (2) заменить на условие

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_T \left| \operatorname{Re} a_1(t) \frac{\partial u(rt)}{\partial r} - f_1(t) \right|^p \rho(t) |dt| = 0, \quad (7)$$

где $\rho(t)$ некоторая весовая функция, обращающаяся в нуль в точках $t_k \in T(p)$.

Предполагая, что функция $\rho(t)$ допускает представление $\rho(t) = \prod_{t_k \in T(p)} \| \ln |t_k - t| \|^{-p/q}$, $t \in T$, $\rho(t) \neq 0$, $\bar{\rho}(t) \in C(T)$, $q = p(p-1)^{-1}$, и используя

результаты работы (10), можно доказать, что теоремы 1, 2 и 3 верны и в случае $T(p) \neq \emptyset$, если предварительно второе условие в (2) заменить на условие (7).

5. Через $C^{1+\mu}(\bar{D})$ обозначим класс функций $u(z)$, удовлетворяющих условию

$$\frac{\partial u(z)}{\partial x} \in C^{\mu}(\bar{D}), \quad \frac{\partial u(z)}{\partial y} \in C^{\mu}(\bar{D}), \quad z \in \bar{D}.$$

В этом пункте приведем одну теорему, относящуюся к случаю, когда граничные функции принадлежат классу Гельдера, а граничные условия (2) понимаются в классическом смысле. Предполагая, что $f_0(t) \in C^{1+\mu}(T)$, $f_1(t) \in C^{\mu}(T)$, рассмотрим следующую граничную задачу: найти решение уравнения (1) такое, что $u(z) \in C^{1+\mu}(\bar{D})$ и

$$\operatorname{Re} \alpha_0(t) = f_0(t), \quad t \in T, \quad \operatorname{Re} \alpha_1(t) \frac{\partial u(t)}{\partial r} = f_1(t), \quad t \in T, \quad (8)$$

где $\alpha_0(t), \alpha_1(t) \in C^{1+\mu}(T)$, $\alpha_0(t) \neq 0$, $\alpha_1(t) \neq 0$.

Теорема 4. *Справедливы следующие утверждения:*

а) если $\min\{\alpha_0; \alpha_1\} \geq -2$ и $\min\{\alpha_0; \alpha_1\} = -2$ лишь при $\alpha_0 \neq \alpha_1$, то однородная задача (1)–(8) имеет $4 + \alpha_0 + \alpha_1$ линейно независимых решений;

б) если $\min\{\alpha_0; \alpha_1\} < -2$, то однородная задача (1)–(8) имеет $4 + \alpha_0 + \alpha_1$ линейно независимых решений;

г) если $\alpha_0 = \alpha_1 = -2$ и $\beta_0^2 \neq \beta_1^2$, то однородная задача (1)–(8) имеет одно линейно независимое решение;

д) если $\alpha_0 = \alpha_1 = -2$ и $\beta_0^2 = \beta_1^2$, то однородная задача (1)–(8), кроме тривиального, других решений не имеет;

е) индекс задачи (1)–(8) равен $4 + \alpha_0 + \alpha_1$.

Отметим, что в частном случае $\alpha_0(t) = \alpha_1(t) = 1$, но для произвольной области, ограниченной гладкими кривыми, теорема 4 установлена в работе (7). Если $\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_1 \geq 0$, эта же теорема в случае круга установлена в работе (6).

Ериванский политехнический институт

2. Մ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ

Իրման—Հիլբերտի տիպի եզրային խնդիրներ $L^p(p \geq 1)$ դասերում
Բիցաձեի հավասարման նսմաւ

Դիցուք D -ն միավոր շրջանն է, իսկ T -ն միավոր շրջանագիծը: Աշխատանքում հետազոտվում է հետևյալ եզրային խնդիրը. գտնել D -ում Բիցաձեի հավասարմանը բավարարող $u(z)$ ֆունկցիան, այնպես որ տեղի ունենան հետևյալ եզրային պայմանները

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \| \operatorname{Re} z_0(t) u(r t) - f_0(t) \|_p = 0,$$

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \left\| \operatorname{Re} z_1(t) \frac{\partial u(r t)}{\partial r} - f_1(t) \right\|_p = 0,$$

որտեղ $f_0(t)$, $f_1(t) \in L^1(T)$ / րական ֆունկցիաներ են $z_0(t) \neq 0$, $z_1(t) \neq 0$, $z_0(t) \in C^{1+\mu}(T)$, ($\mu > 0$), $z_1(t)$ -ն կտր առ կտր $C^{1+\mu}(T)$ դասին պատկանող ֆունկցիա է:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ А. Б. Бицадзе, Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, Наука, М., 1966.
- ² Н. Е. Товмасян, Сиб. мат. журн., т. 7, № 4 (1961).
- ³ И. А. Бикчантаев, Изв. высших уч. заведений. Мат., № 6 (157), 1975.
- ⁴ Н. Е. Товмасян, Г. М. Айрапетян, Тезисы докл. Северо-Кавказской региональной конференция, Грозный, 1989.
- ⁵ М. А. Зироян, Эффективные методы решения краевых задач типа Римана для уравнений Бицадзе, Арм. НИИНТИ, № 83, Ар-88, Деп. 1988.
- ⁶ А. А. Закарян, Корректные граничные задачи для уравнения Бицадзе, Арм. НИИНТИ, № 66, Ар-88, Деп. 1988.
- ⁷ А. С. Бабаян, ДАН АрмССР, т. 91, № 1 (1990).
- ⁸ Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, Наука, М., 1968.
- ⁹ Г. М. Айрапетян, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 25, № 1 (1990).
- ¹⁰ Г. М. Айрапетян, ДАН АрмССР, т. 89, № 4 (1989).