

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

А. Г. Багдасарян

Теоремы вложения и интерполяции для некоторых пространств
типа Лизоркина—Трибеля

(Представлено чл.-корр. АН Армении А. Б. Нерсисяном 14/VI 1990)

В заметке вводятся и изучаются пространства $F_{p,q}^s(\mu; R_n)$ типа Лизоркина—Трибеля, порожденные некоторым многогранником и обобщающие известные пространства Лизоркина—Трибеля (изотропные и анизотропные (¹)). Эти пространства естественным образом возникают при исследовании граничных задач для гипоеллиптических операторов. Приводятся интерполяционная теорема и теоремы вложения (разных метрик и разных измерений) для рассматриваемых пространств. Соответствующие B -пространства типа Никольского—Бесова введены и исследованы в (^{2,3}).

1°. Будем рассматривать полный многогранник N (⁴) с вершинами $\alpha^0, \alpha^1, \dots, \alpha^n, \beta^1, \dots, \beta^N$, при этом вершина α^j находится на j -той координатной оси ($j = 1, 2, \dots, n$), $\alpha^0 = (0, \dots, 0)$, $\alpha^j, \beta^l \in Z_n^+$ ($j = 1, 2, \dots, n$; $l = 1, 2, \dots, N$), где Z_n^+ множество векторов из R_n с целыми неотрицательными компонентами.

Если $\xi \in R_n$, $\alpha \in Z_n^+$, то положим $\xi^\alpha = \prod_{i=1}^n \xi_i^{\alpha_i}$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, $(\alpha : \xi) = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\xi_i}$, $\xi_i \neq 0$ ($i = 1, \dots, n$). Сопоставим многограннику N функции

$$v(\xi) = \left(\sum_{j=1}^n \xi^{2\alpha^j} + \sum_{l=1}^N \xi^{2\beta^l} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \mu(\xi) = |v(\xi)|^{\frac{1}{|\alpha^n|}}. \quad (1)$$

Определение 1. Пусть $1 < p, q < \infty$. Через $\Phi_n = \Phi_n(\mu; L_p(L_q))$ обозначим множество систем функций $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$, обладающих следующими свойствами:

- а) $\varphi_k \in S(R_n)$, $(F\varphi_k)(\xi) \geq 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$;
- б) $\text{supp } F\varphi_k \subset \{\xi \in R_n; 2^{k-1} \leq \mu(\xi) \leq 2^{k+1}\}$, $k = 1, 2, \dots$;
 $\text{supp } F\varphi_0 \subset \{\xi \in R; \mu(\xi) \leq 2\}$;
- в) $\sum_{k=0}^\infty (F\varphi_k) \geq c_1 > 0$, $\xi \in R^n$;
- г) $\{F\varphi_k\}_{k=0}^\infty \in M_{p,q}$.

т. е. (см. (3)) оператор $F^{-1}\{F\varphi_k Ff\}$ ($f = \{f_k\}_{k=0}^\infty \in L_p(l_q)$, $f_k \in S$, $k = 0, 1, \dots$) может быть расширен до непрерывного оператора из $L_p(l_q)$ в $L_p(l_q)$.

Здесь F — оператор преобразования Фурье, S — класс Шварца, определение пространства $L_p(l_q)$ (как и $l_q(L_p)$) можно найти, например, в (1).

Приведем пример системы из Φ_n . Положим $\varphi \in S(R_1)$, $(F\varphi)(t) \geq 0$, $k = 1, 2, \dots$

$$\text{supp } F\varphi \subset \left[\frac{1}{2}, 2 \right], \quad (F\varphi)(t) > 0 \quad \text{при } t \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2} \right].$$

При подходящем выборе функции φ_0 система $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$

$$(F\varphi_k)(\xi) = (F\varphi)(2^{-k}\mu(\xi)), \quad k = 1, 2, \dots$$

принадлежит $\Phi_n(\mu; L_p(l_q))$. Проверка свойств а) — в) не представляет особого труда. Для проверки свойства г), согласно теореме 5 из (5), достаточно доказать неравенство

$$\int_R \left| \frac{\partial^n F\varphi_k(\xi)}{\partial \xi_1 \dots \partial \xi_n} \right| d\xi \leq c_2.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_{R_n} \left| \frac{\partial^n F\varphi_k(\xi)}{\partial \xi_1 \dots \partial \xi_n} \right| d\xi &= \int_{G_n} \left| \frac{\partial^n F\varphi_k(2^{\frac{k}{\lambda}} x)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \right| dx \leq \\ &\leq \int_{G_k} \left| \frac{\partial^n F\varphi \left(\left| |x|_\alpha + \sum_{i=1}^N 2^{2k((\beta^i/\alpha) - |\alpha^n|)} x^{2\beta^i} \right|^{1/2} \right)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \right| dx \leq c_2, \end{aligned}$$

$$\text{где } \lambda = \left(\frac{|\alpha^1|}{|\alpha^n|}, \dots, \frac{|\alpha^n|}{|\alpha^n|} \right), \quad |x|_\alpha = \left(\sum_{i=1}^N x^{2\alpha^i} \right)^{1/2}, \quad 2^{\frac{k}{\lambda}} x = \left(2^{\frac{k}{\lambda_1}} x_1, \dots, 2^{\frac{k}{\lambda_n}} x_n \right),$$

$$G_k = \left\{ x \in R_n; \frac{1}{2} \leq \left| |x|_\alpha + \sum_{i=1}^N 2^{2k((\beta^i/\alpha) - |\alpha^n|)} x^{2\beta^i} \right|^{1/2} \leq 2 \right\}.$$

Последняя оценка следует из вложения $G_k \subset \{x \in R_n; |x|_\alpha \leq 2^{|\alpha^n|}\}$ и ограниченности подынтегрального выражения. Полученная оценка показывает, что выполнены условия теоремы 5 из (5). Свойство г) доказано.

Определение 2. Пусть $1 < p, q < \infty$, $-\infty < s < \infty$, $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty \in \Phi$. Положим

$$\text{а) } F_{p,q}^s(\mu; R_n) = \left\{ f \in S'; \|f\|_F = \left\| \left(\sum_{k=0}^\infty 2^{ksq} |f * \varphi_k|^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(R_n)} < \infty \right\};$$

$$\text{б) } B_{p,q}^s(\mu; R_n) = \left\{ f \in S'; \|f\|_B = \left(\sum_{k=0}^\infty 2^{ksq} \|f * \varphi_k\|_{L_p(R_n)}^q \right)^{1/q} < \infty \right\}.$$

Пространства B и F банаховы и не зависят от выбора системы $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$ из Φ_n .

Для банаховых пространств A_0, A_1 символы $[A_0, A_1]_\theta$ (A_0, A_1) $_{\theta, q}$ означают интерполяционные пространства, полученные соответственно „комплексным“ и „вещественным“ методами (см. (°)).

Теорема 1. Пусть $0 < \theta < 1$, $s^* = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$, $\frac{1}{p^*} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$,

$$\frac{1}{q^*} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}. \quad \text{Тогда}$$

а) при $-\infty < s_0 \neq s_1 < \infty$, $1 < p_0, p_1, q_0, q_1 < \infty$

$$(F_{p_0, q_0}^{s_0}(\mu; R_n), F_{p_1, q_1}^{s_1}(\mu; R_n))_{\theta, p^*} = B_{p^*, q^*}^{s^*}(\mu; R_n),$$

б) при $-\infty < s < \infty$, $1 < p_0, p_1, q < \infty$

$$(F_{p_0, q}^s(\mu; R_n), F_{p_1, q}^s(\mu; R_n))_{\theta, p^*} = F_{p^*, q}^s(\mu; R_n),$$

в) при $-\infty < s_0 \neq s_1 < \infty$, $1 < p, q_0, q_1 < \infty$, $1 < q < \infty$

$$(F_{p, q_0}^{s_0}(\mu; R_n), F_{p, q_1}^{s_1}(\mu; R_n))_{\theta, q} = B_{p, q}^{s^*}(\mu; R_n),$$

г) при $-\infty < s_0 \neq s_1 < \infty$, $1 < q_0, q_1, q < \infty$

$$(B_{p, q_0}^{s_0}(\mu; R_n), F_{p, q_1}^{s_1}(\mu; R_n))_{\theta, q} = B_{p, q}^{s^*}(\mu; R_n),$$

д) при $-\infty < s_0, s_1 < \infty$, $1 < p_0, p_1, q_0, q_1 < \infty$

$$[F_{p_0, q_0}^{s_0}(\mu; R_n), F_{p_1, q_1}^{s_1}(\mu; R_n)]_0 = F_{p^*, q^*}^{s^*}(\mu; R_n).$$

Доказательство теоремы сводится к доказательству соответствующих интерполяционных формул для пространств L_p (l_q) (°)

2°. Пусть G та грань полного многогранника N , которая пересекается с прямой $a_1 = \dots = a_n$ (если их несколько, то G — какая-либо из граней максимальной размерности). Пусть далее $(1:m) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{m_i} = 1$

уравнение грани G и $(1:m) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i}$ (число $(1:m)$ не зависит от выбора грани G).

Теорема 2. Пусть $1 < p_0 \leq p_1 < \infty$, $1 < q_0 \leq q_1 < \infty$, $-\infty < s_0, s_1 < \infty$, $s_0 = (1:m)|\alpha^n|\sigma + s_1$, $\sigma = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}$. Тогда

$$F_{p_0, q_0}^{s_0}(\mu; R_n) \subset F_{p_1, q_1}^{s_1}(\mu; R_n).$$

Для формулировки теоремы о следах нам понадобится следующее определение.

Определение 3 (см. (°)). Пусть A_0, A_1 банаховы пространства. Оператор $R \in L(A_0, A_1)$ называется ретракцией, если существует оператор $S \in L(A_1, A_0)$ такой, что $RS = E$ (тождественный оператор из $L(A_1, A_1)$).

Пусть вершины β' многогранника N находятся в $Z_{n-1}^* \equiv Z_n^*|_{\alpha_n = 0}$. Пусть далее N' проекция многогранника N на R_{n-1} . Согласно (1)

имеем $v(\xi) = (\xi_n^{2|a_n|} + v'(\xi'))^{1/2}$. Функция $v'(\xi')$ отвечает многограннику N' . Положим

$$\mu'(\xi') = [v'(\xi')]^{1/a_n} = \left(\sum_{i=1}^n (\xi'_i)^{2|a_i|} \right)^{1/2|a_n|}.$$

Рассмотрим оператор следа:

$$R'f = \left\{ f(x', 0), \frac{\partial f}{\partial x_n}(x', 0), \dots, \frac{\partial^r f}{\partial x_n^r}(x', 0) \right\}, \quad x' = (x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Для аналитических функций $f_M = \sum_{k=0}^M \varphi_k \circ f$, $f \in F_{p,q}^s(\mu; R_n)$ оператор следа имеет естественный смысл. С помощью предельного перехода можно его распространить на все $F_{p,q}^s(\mu; R_n)$.

Теорема 3. Пусть $1 < p, q < \infty$, $r = 0, 1, \dots$; $s > r + \frac{1}{p}$. Тогда оператор следа (после продолжения по непрерывности) есть ретракция пространства

$$F_{p,q}^s(\mu; R_n) \text{ на } \prod_{j=1}^r B_{p,p}^{s-\frac{1}{p}-j}(\mu'; R_{n-1}).$$

Ереванский государственный университет

Ա. Գ. ՔԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ

Ներդրման և ինտերպոլյացիոն թեորեմներ Լիզորկին—Տրիբելի տիպի որոշ տարածությունների համար

Հոդվածում մտցվում են լիզորկին կանոնավոր բազմանիստով ծնված տարածություններ, որոնք (ինչպես և համապատասխան արդյունքները) ընդհանրացնում են Լիզորկին—Տրիբելի տիպի իզոտրոպ և անիզոտրոպ, հայտնի տարածությունները: Ներկայացվում են ինտերպոլյացիոն պնդումներ այդ տարածությունների մասին (իրական և կոմպլեքս եղանակներով):

Գտնվում է պայման Լիզորկին—Տրիբելի տիպի տարածությունների ներդրումների համար: Բերվում է թեորեմ (ուղիղ և հակադարձ) նշված տարածությունների հետքերի մասին:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ X. Трибелъ, Теория функциональных пространств, М., Мир, 1986. ² А. Г. Багдасарян, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 23, № 4, с. 353—365 (1988). ³ А. Г. Багдасарян, ДАН АрмССР, т. 87, № 5, с. 207—211 (1988). ⁴ В. П. Михайлов, О поведении на бесконечности одного класса многочленов. Тр. МИАН СССР, т. 91, с. 59—81 (1967). ⁵ П. И. Лизоркин, О мультипликаторах интегралов Фурье в пространствах $L_{p,\theta}$ Тр. МИАН СССР, т. 81, с. 231—248 (1967). ⁶ И. Берг, Я. Лефстрём, Интерполяционные пространства. Введение. Мир, М., 1980.