ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 91 1990 № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 519.92

Е. А. Арутюнян, М. Е. Арутюнян

Границы достижимых скоростей передачи по каналу с множественным доступом при заданной экспоненте вероятности ошибки

(Представлено академиком АН Армении Р. Р. Варшамовым 13/VI 1990)

Канал с множественным доступом (КМД) с двумя кодерами и одним декодером обозначается $W=\{W: X_1\times X_2\to Y\}$ и задается набором переходных вероятностей $W(y|x_1, x_2)$ $x_1\in X_1$, $x_2\in X_2$, $y\in Y$, где множества X_1 и X_2 являются алфавитами входных сигналов, соответственно, на первом и втором входах, а Y — на выходе канала.

Первая модель канала, которая будет рассматриваться в этой статье, названа Слепяном и Вулфом ([1]) КМД с коррелированными источниками. По каналу передается информация от трех источников, один из которых связан с двумя кодерами, а каждый из двух других источников связан с одним из кодеров. Множества сообщений источников обозначим, соответственно, M_0, M_1, M_2. Блоковым кодом длины n для такого канала называется тройка отображений

$$f_1: M_0\times M_1\to X_1^n,\ f_2: M_0\times M_2\to X_2^n,\ g: Y^n\to M_0\times M_1\times M_2.$$

Отображения f_1 и f_2 реализуют кодирование, соответственно, на первом и втором входах, а g—декодирование. Код длины n характеризуется тройкой скоростей $n^{-1}\log|M_i|$, $i=0, 1, 2$ и надежностью передачи. Как обычно определяется вероятность ошибки декодирования при передаче сообщений $m_0\in M_0$, $m_1\in M_1$, $m_2\in M_2$,

$$e_{m_0, m_1, m_2}(f_1, f_2, g)=W^n(y: g(y)\neq(m_0, m_1, m_2)|f_1(m_0, m_1),\ f_2(m_0, m_2)),$$

где $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)\in Y^n$.

Можно рассматривать среднюю $\bar{e}$ и максимальную e вероятности ошибки кода (f_1, f_2, g).

$$e(f_1, f_2, g)=\max_{m_0, m_1, m_2} e_{m_0, m_1, m_2}(f_1, f_2, g),$$

$$\bar{e}(f_1, f_2, g)=\frac{1}{|M_0||M_1||M_2|}\sum_{m_0, m_1, m_2} e_{m_0, m_1, m_2}(f_1, f_2, g).$$

Тройка неотрицательных чисел (R_0, R_1, R_2) называется ε-достижимой для КМД W, если для любого $\delta>0$ и каждого достаточно большого n существует блоковый код (f_1, f_2, g) длины n такой, что

$$n^{-1}\log|M_i|>R_i-\delta, \quad i=0, 1, 2,$$

а средняя (или максимальная) вероятность ошибки удовлетворяет условию

$$\bar{e}(f_1, f_2, g)\leq\varepsilon.$$

Наша цель — изучение области E-достижимых троек скоростей, т. е. достижимых при $\varepsilon=2^{-nE}$, $E>0$. Показатель E называется надежностью ([2]).

В частном случае, когда $|M_0|=1$, получается классический КМД. Впервые этот канал был введен Шенноном ([3]) и изучен Алсведе ([4]) и Ван дер Мёленом ([5]). Шеннон нашел область пропускной способности этого канала. Алсведе ([4]) получил простую характеризацию области пропускной способности, а позже другую характеризацию в работе ([6]).

В статье Слепяна и Вулфа ([1]) была найдена область достижимых скоростей и построена оценка случайного кодирования для вероятности ошибки в случае КМД с коррелированными источниками. Для этого же случая Арутюняном ([7]) была построена нижняя оценка типа сферической упаковки для вероятности ошибки при заданных скоростях R_0, R_1, R_2. Эта оценка в случае асимметричного КМД ([7]), а также в случае, когда матрица W переходных вероятностей канала обладает определенной симметрией, при больших значениях скоростей R_0, R_1, R_2, близких к границе области, совпадает с верхними оценками, полученными Слепяном и Вулфом ([1]). В полученной в ([7]) границе максимизирующее совместное распределение на входах кодеров X_1, X_2 и вспомогательной случайной величины U является произвольным, тогда как есть основания считать верной гипотезу о том, что X_1 и X_2 должны быть условно независимыми при заданной U. Однако до настоящего времени доказательство верности этой гипотезы никем не получено.

В настоящей статье рассмотрена задача оценивания области E-достижимых скоростей, в некотором смысле эквивалентная задаче оценивания экспоненты вероятности ошибки при заданных скоростях. Строятся границы сферической упаковки и случайного кодирования для области E-достижимых скоростей передачи для КМД с коррелированными источниками. В качестве следствия получаются соответствующие границы в случаях $|M_0|=1$ и $|M_2|=1$. Верхняя оценка так же как и в ([7]) максимизируется по произвольному совместному распределению, что в случае асимметричного КМД ($|M_2|=1$ или $|M_1|=1$) не может быть улучшено, так как так же получается граница случайного кодирования.

Вторая модель, исследуемая в статье, это КМД с подглядывающими кодерами ([9]), когда один из кодеров имеет полную информацию о втором кодере, а общий источник отсутствует, т. е. $|M_0| = 1$. Построенные верхняя и нижняя оценки области E-достижимых скоростей для этого канала совпадают при малых E.

В многокомпонентных системах чаще [10] рассматривают критерий средней вероятности ошибки, хотя интерес представляют исследования и для критерия максимальной вероятности ошибки. Ясно, что внешняя оценка области достижимых скоростей, построенная при ограничении на среднюю вероятность ошибки, остается верной и при максимальной вероятности ошибки. В случае нижних оценок, наоборот, достаточно рассматривать максимальную вероятность ошибки.

При формулировке результатов мы будем пользоваться определениями и обозначениями взаимной информации, дивергенции, энтропии, приведенными в [10, 11].

Для любого $E>0$ имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Если средняя вероятность ошибки некоторого кода для КМД с коррелированными источниками не превышает* $\exp\{-nE\}$, *то скорости* R_0, R_1, R_2 *этого кода при достаточно больших* n *принадлежат выпуклой оболочке областей, задаваемых следующими неравенствами:*

$$0 \leqslant R_1 \leqslant \min_{V:\, D(V\|W|P) \leqslant E} I(Y \wedge X_1 | X_2, U),$$

$$0 \leqslant R_2 \leqslant \min_{V:\, D(V\|W|P) \leqslant E} I(Y \wedge X_2 | X_1, U),$$

$$R_1 + R_2 \leqslant \min_{V:\, D(V\|W|P) \leqslant E} I(Y \wedge X_1, X_2 | U),$$

$$0 \leqslant R_0 + R_1 + R_2 \leqslant \min_{V:\, D(V\|W|P) \leqslant E} I(Y \wedge X_1, X_2),$$

где P — *произвольное совместное распределение на* $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \times \mathbf{U}$, *а* U *некоторая вспомогательная случайная величина.*

Следствие 1. *Если средняя вероятность ошибки кода для КМД с* $|M_0| = 1$ *не превышает* $\exp\{-nE\}$, *то скорости* R_1, R_2 *такого кода при достаточно больших* n *принадлежат выпуклой оболочке областей, задаваемых следующими неравенствами:*

$$0 \leqslant R_1 \leqslant \min_{V:\, D(V\|W|P) \leqslant E} I(Y \wedge X_1 | X_2),$$

$$0 \leqslant R_2 \leqslant \min_{V:\, D(V\|W|P) \leqslant E} I(Y \wedge X_2 | X_1),$$

$$R_1 + R_2 \leqslant \min_{V:\, D(V\|W|P) \leqslant E} I(Y \wedge X_1, X_2),$$

где P — *произвольное совместное распределение на* $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$.

Следствие 2. *Если средняя вероятность ошибки кода для КМД с* $|M_2| = 1$ *не превышает* $\exp\{-nE\}$, *то скорости* R_0 *и* R_1 *такого кода при достаточно больших* n *принадлежат выпуклой оболочке областей, задаваемых неравенствами:*

$$0 \leqslant R_1 \leqslant \min_{V:\, D(V\|W|P) < E} I(Y \wedge X_1 | X_2),$$

$$0 \leqslant R_0 + R_1 \leqslant \min_{V:\, D(V\|W|P) < E} I(Y \wedge X_1,\ X_2),$$

где P — произвольное совместное распределение на $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$.

В следующей теореме будем предполагать, что в КМД с подглядывающими кодерами второй кодер имеет полную информацию о первом кодере и при этом $|M_0| = 1$. Имеет место

Теорема 2. *При условии, что второму кодеру КМД известны действия первого кодера, если средняя вероятность ошибки кода не превышает* $\exp\{-nE\}$, *то скорости R_1 R_2 этого кода при достаточно больших n принадлежат выпуклой оболочке областей, задаваемых следующими неравенствами:*

$$0 \leqslant R_1 \leqslant H(X_1),$$

$$0 \leqslant R_2 \leqslant \min_{V:\, D(V\|W|P) < E} I(Y \wedge X_2 | X_1),$$

$$R_1 + R_2 \leqslant \min_{V:\, D(V\|W|P) < E} I(Y \wedge X_1,\ X_2),$$

где P — произвольное распределение на $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$.

Перейдем теперь к внутренним границам области E-достижимых скоростей.

Теорема 3. *Существует код со скоростями R_0, R_1, R_2 для КМД с коррелированными источниками, максимальная вероятность ошибки которого меньше* $\exp\{-nE\}$ *а скорости R_0, R_1, R_2 при достаточно больших n принадлежат выпуклой оболочке областей, задаваемых неравенствами*

$$R_1 \leqslant \min_{V:\, D(V\|W|P) < E} |I(Y \wedge X_1 | X_2,\ U) + D(V\|W|P) - E - \delta|^+,$$

$$R_2 \leqslant \min_{V:\, D(V\|W|P) < E} |I(Y \wedge X_2 | X_1,\ U) + D(V\|W|P) - E - \delta|^+,$$

$$R_1 + R_2 \leqslant \min_{V:\, D(V\|W|P) < E} |I(Y \wedge X_1,\ X_2 | U) + D(V\|W|P) - E - \delta|^+,$$

$$R_0 + R_1 + R_2 \leqslant \min_{V:\, D(V\|W|P) < E} |I(Y \wedge X_2,\ X_1) + D(V\|W|P) - E - \delta|^+,$$

здесь распределение P таково, что случайные величины X_1, X_2 условно независимы при заданной U, т. е.

$$p(u,\ x_1,\ x_2) = p(u)p(x_1 | u)p(x_2 | u).$$

Следствие 3. *Существует код для КМД с $|M_0| = 1$, максимальная вероятность ошибки которого меньше* $\exp\{-nE\}$ *и скорости R_1, R_2 при достаточно больших n принадлежат выпуклой оболочке областей, задаваемых неравенствами*

$$R_1 \leqslant \min_{V:\, D(V\|W|P) < E} |I(Y \wedge X_1 | X_2) + D(V\|W|P) - E - \delta|^+,$$

$$R_2 \le \min_{V: D(V\|W|P)\le E} |I(Y \wedge X_2 | X_1) + D(V\|W|P) - E - \delta|^+ ,$$

$$R_1 + R_2 \le \min_{V: D(V\|W|P)\le E} |I(Y \wedge X_1, X_2) + D(V\|W|P) - E - \delta|^+ ,$$

где распределение P *соответствует независимости случайных величин* X_1, X_2.

Нетрудно сформулировать следствие, соответствующее случаю асимметричного КМД, при этом в отличие от общего случая в этой оценке, как и в следствии 2, максимизирующее входное распределение p является произвольным совместным на $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$.

Теорема 4. *Существует код для КМД с подглядывающими кодерами, максимальная вероятность ошибки которого меньше* $\exp\{-nE\}$ *и скорости* R_1, R_2 *при достаточно больших* n *принадлежат выпуклой оболочке областей, задаваемых неравенствами:*

$$R_2 \le \min_{V: D(V\|W|P)\le E} |I(Y \wedge X_2 | X_1) + D(V\|W|P) - E - \delta|^+ ,$$

$$R_1 + R_2 \le \min_{V: D(V\|W|P)\le E} |I(Y \wedge X_1, X_2) + D(V\|W|P) - E - \delta|^+ ,$$

где P — *произвольное распределение на* $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$.

Доказательство теорем 1 и 2 основывается на комбинаторном методе, предложенном в ([11]). Тем же методом была доказана ([12]) граница сферической упаковки области E-достижимых скоростей КМД при некоторой иерархии источников сообщений, область достижимых скоростей которого была найдена Преловым в ([13]).

Доказательство теорем 3 и 4 основано на лемме об упаковке ([10]).

Вычислительный центр Академии наук Армении
и Ереванского государственного университета
Ереванский государственный университет

Ե. Ա. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Մ. Ե. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Սխալի հավանականության տված ցուցիչի դեպքում բազմակի մուտքերով կապուղով հաղորդելու հասանելի արագությունների գնահատականներ

Հոդվածում երկու կոդավորիչով և մեկ ապակոդավորիչով բազմակի մուտքերով առանց հիշողության կապուղիների մի քանի մոդելների համար ստացված են սխալի հավանականության ցուցչային նվազման տված E *ցուցիչից կախված հաղորդման հասանելի արագությունների տիրույթի արտաքին և ներքին գնահատականները։ Հետևյալ երկու մոդելների դեպքում* E*-ի փոքր արժեքների համար գնահատականները համընկնում են։ Առաջին մոդելում առկա են ընդհանուր և մեկ մասնակի աղբյուրները։ Երկրորդում առկա են միայն երկու մասնակի աղբյուրները, սակայն երկրորդ կոդավորիչը լրիվ տեղեկություններ ունի առաջին կոդավորիչի մասին։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *D. Slepian, J. K. Wolf.* Bell. Syst. Tech. J., v. 52, p. 1037—1076 (1973). [2] *К. Э. Шеннон.* Работы по теории информации и кибернетике. ИЛ, М., с. 540—586, (1963). [3] *К. Э. Шеннон,* там же, с. 622—663. [4] *R. Ahlswede.* Proc. 2nd Int. Symp. Inform. Theory. Tsahkadsor. Armenian SSR, p. 23—52 (1971). Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences, 1973. [5] *E. C. van der Meulen,* Proc. 2nd Int. Symp. Inform. Theory, Tsahkadsor, Armenian SSR, p. 103—135 (1971). Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences, 1973. [6] *R. Ahlswede,* Ann. Prob., v. 2, p. 805—814 (1974). [7] *Е. А. Арутюнян.* Проблемы передачи информ., т. 11, № 2, с. 23—36 (1975). [8] *K. de Bruyn, E. C. van der Meulen,* IEEE Trans. Inform. Theory, v. 32, № 4, p. 607—617 (1986). [9] *M. J. Willems, E. C. van der Meulen,* IEEE Trans. Inform. Theory, v. 31, № 3, p. 313—327 (1985). [10] *И. Чисар, Я. Кёрнер,* Теория информации. Теоремы кодирования для дискретных систем без памяти. Мир, М., 1985. [11] *Е. А. Арутюнян.* Межвуз. сб. науч. трудов. Математика, Ереван, вып. 1, с. 213—220 (1982). [12] *Е. А. Арутюнян,* Тезисы докл. на IX симпозиуме по проблеме избыточности в информ. системах, Ленинград, часть I, с. 3—4 (1986). [13] *В. В. Прелов,* Проблемы передачи информ., т. 20, № 4, с. 3—10 (1984).