ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Том 91 1990 №2

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

С. Х. Дарбинян

Одно достаточное условие для гамильтоновости орграфов

(Представлено чл.-корр. АН Армении Ю. Г. Шукуряном 11/V 1990)

В настоящей работе рассматриваются конечные орграфы, без петель и кратных дуг. Через $V(G)$, $E(G)$ и $\delta(G)$ обозначим соответственно множество вершин, множество дуг и минимальную степень орграфа G. Скажем, что p-вершинный орграф G удовлетворяет условию L, если степени $p-1$ вершин орграфа G не меньше чем p. В работе [1] для любого $p\geqslant 8$ построен p-вершинный 2-связный негамильтоновый орграф G, удовлетворяющий условию L. Все эти построенные орграфы имеют минимальную степень $\delta(G)=4$. Кроме того, известно [2,3], что если сильно связный p-вершинный орграф G удовлетворяет условию L и $\delta(G)=p-1$, то он является гамильтоновым. В связи с этим возникает задача: исследовать гамильтоновость p-вершинных 2-связных орграфов G с минимальной степенью $\delta(G)$, $5\leqslant \delta(G)\leqslant p-2$, удовлетворяющих условию L. В предлагаемой работе доказывается гамильтоновость таких орграфов G при $\delta(G)\geqslant p-4$.

Пусть G—орграф и $A, B\subseteq V(G)$, $x\in V(G)$. Мы будем использовать в дальнейшем следующие обозначения:

$$E(A\to B)=\{yz\in E(G)/y\in A,\ z\in B\},$$

$$E(A, B)=E(A\to B)\bigcup E(B\to A),$$

$$d(x)=|E(\{x\}, V(G))|.$$

Подграф, порожденный множеством вершин A, обозначим через $\langle A\rangle$. Число $d(x)$ называется степенью вершины x. Запись $A\to B$ означает, что если $y\in A$ и $z\in B$, то $yz\in E(G)$. Если $C_k=x_1x_2\ldots x_kx_1$ контур длины k в орграфе G, то всюду $x_{k+i}=x_i$, $i\geqslant 1$. Пусть $P=x_1x_2\ldots x_n$ ($n\geqslant 2$) путь в орграфе G и $y\notin V(P)$. Если для некоторого i, $1\leqslant i\leqslant n-1$, имеет место x_iy, $yx_{i+1}\in E(G)$, то будем говорить, что путь $x_1x_2\ldots x_iyx_{i+1}\ldots x_n$ получается удлинением пути P с помощью вершины y. Через $[m, n]$ обозначается множество целых чисел, не меньших m и не больших n.

В настоящей работе доказывается следующая

Теорема. *Пусть p-вершинный ($p\geqslant 9$) 2-связный орграф G удовлетворяет условию L. Если $\delta(G)\geqslant p-4$, то G является гамильтоновым.*

Приведем лишь схему доказательства теоремы. Предположим, что G является негамильтоновым орграфом. Пусть x_0 та вершина орграфа G, для которой $d(x_0)=\delta(G)$. Через $C_m(x_0)$ обозначим множество контуров наибольшей длины m, содержащих вершину x_0. Сначала доказываются утверждения 1—2.

1. $m \leqslant p-3$.

2. Пусть контур $C_m = x_1x_2 \ldots x_mx_1 \in C_m(x_0)$ и подграф $\langle V(G) - V(C_m)\rangle$ является сильно связным. Если x_iu, $vx_j \in E(G)$, где $x_i \neq x_j$ и u, $v \in V(G) - V(C_m)$, то $x_0 \in \{x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{j-1}\}$.

Известно ([1]), что орграф G содержит контур $C_{p-1} = x_1x_2 \ldots x_{p-1}x_1$. Из $m \leqslant p-3$ имеем, что $x_0 \notin V(C_{p-1})$, а из 2-связности G вытекает существование таких вершин x_r, $x_s \in V(C_{p-1})$, $x_r \neq x_s$, что x_rx_0, $x_0x_s \in E(G)$ и

$$E(\{x_0\}, \{x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_{s-1}\}) = \varnothing.$$

Можем предполагать, что контур C_{p-1} выбран таким образом, что число $d = |\{x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_{s-1}\}|$ было возможно наименьшим. Из $m \leqslant p-3$ и $d(x_0) \geqslant p-4$ получаем, что $3 \leqslant d \leqslant 4$. Пусть для определенности $x_s = x_1$, $y_i = x_{r+i}$, $1 \leqslant i \leqslant d$, и $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_d\}$. Далее доказываются утверждения 3—6.

3. Путь $P = x_1x_2 \ldots x_{p-d-1}$ невозможно удлинить с помощью вершин множества Y.

4. Пусть подграф $\langle Y\rangle$ является сильно связным. Тогда

а) если $E(\{x_i\} \to Y) = \varnothing$, где $1 \leqslant i \leqslant p-d-2$, то

$$E(Y \to \{x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{p-d-1}\}) = \varnothing;$$

б) существует такое число $l \in [2, p-d-2]$, что

$$E(\{x_1, x_2, \ldots, x_{l-1}\} \to Y) = E(Y \to \{x_{l+1}, x_{l+2}, \ldots, x_{p-d-1}\}) = \varnothing.$$

5. Если $x_ix_0 \in E(G)$, где $1 \leqslant i \leqslant p-d-2$, то

$$E(\{x_0\} \to \{x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{p-d-1}\}) = \varnothing.$$

6. Существует такое число $t \in [2, p-d-2]$, что

$$E(\{x_1, x_2, \ldots, x_{t-1}\} \to \{x_0\}) = E(\{x_0\} \to \{x_{t+1}, x_{t+2}, \ldots, x_{p-d-1}\}) = \varnothing,$$

а если $d=4$, то

$$\{x_t, x_{t+1}, \ldots, x_{p-5}\} \to \{x_0\} \to \{x_1, x_2, \ldots, x_t\}.$$

В дальнейшем случаи $d=3$ и $d=4$ рассматриваются отдельно.

Для случая $d=3$ доказываются утверждения 7—10.

7. Для любого $k \in [1, p-6]$ имеет место

$$E(\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \to \{x_{k+2}, x_{k+3}, \ldots, x_{p-4}\}) \neq \varnothing.$$

8. Если $t \geqslant 3$ и $t \geqslant l$, то для некоторых $a \in [1, t-2]$ и $b \in [t, p-4]$ имеют место $x_ax_b \in E(G)$ и $E(\{x_0\}, \{x_{a+1}\}) = \varnothing$.

9. $t \geqslant l$ и $t=2$.

10. $t \leqslant l-1$.

Так как утверждения 9 и 10 противоречат друг другу, то случай $d=3$ невозможен.

Для случая $d=4$ доказываются утверждения 11—13.

11. Если подграф $\langle Y\rangle$ является сильно связным, то существуют такие $a \in [1, t-1]$ и $b \in [t+1, p-5]$, что $x_ax_b \in E(G)$.

12. Если подграф $\langle Y\rangle$ является сильно связным и $l < t$, то

$$E(\{x_{b-1}\} \to Y) = \varnothing.$$

13. $m \geqslant p-2$.

Итак, мы получили, что утверждения 1 и 13 противоречат друг другу. Значит, случай $d=4$ также невозможен. Но это противоречит неравенству $3 \leqslant d \leqslant 4$.

Вычислительный центр Академии наук
Армении и Ереванского государственного
университета

Ս. Խ. ԴԱՐԲԻՆՅԱՆ

Կողմնորոշված գրաֆների համիլտոնյանության մի բավարար պայման

Ներկա աշխատանքում ապացուցվում է հետևյալ պնդումը։

Թեորեմ։ Դիցուք p-գագաթանի ($p \geqslant 9$) 2-կապակցված կողմնորոշված G գրաֆի բոլոր գագաթների *(բացի գուցե մեկից)* աստիճանները փոքր չեն p-ից։ Եթե G գրաֆի մինիմալ աստիճանը փոքր չէ, քան $(p-4)$-ը, ապա G-ն հանդիսանում է համիլտոնյան։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. Х. Дарбинян.* ДАН АрмССР, т. 91, № 1, с. 3—6 (1990). [2] *М. Гольдберг* и др., Вычислительная математика и вычислительная техника, № 2, с. 56—61, 1971. [3] *M. Meyniel*, J. of Combin. Theory, Ser. B, v. 14, p. 137—147 (1973).