ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Том 91 1990 №2

УДК 517.53/57

МАТЕМАТИКА

Г. М. Айрапетян

Об ограниченности некоторых интегральных операторов

(Представлено академиком АН Армении М. М. Джрбашяном 27/IV 1990)

1. Пусть D—единичный круг в комплексной плоскости $z=x+$ $+iy$, а T—единичная окружность. Предположим, что функция $\alpha(z)$ определена при $z\in\overline{D}$ и обладает следующими свойствами: а) $\alpha_x'(z)$, $\alpha_y'(z)\in H(\lambda)$ ($H(\lambda)$—класс Гельдера с показателем λ), $z\in\overline{D}$, для некоторого фиксированного $\lambda>0$; б) взаимно однозначно отображает $\overline{D}$ на себя, сохраняя направление на T; в) якобиан отображения $\alpha(z)$ отличен от нуля всюду на $\overline{D}$.

Для произвольного r $(0<r\leqslant 1)$ через Γ_r обозначим замкнутую кривую в единичном круге D, определяемую параметрическим соотношением $z=\alpha(rt)$, где t—комплексный параметр, $t\in T$. Функцию, конформно отображающую единичный круг на внутренность кривой Γ_r, обозначим через $\omega_r(z)$, $\omega_r(0)=0$, $\omega_r'(0)>0$. В данной работе исследуются интегральные преобразования с ядрами:

$$k(t, z)=\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)-\alpha(z)}-\frac{1}{t-z},\ t\in T,\ z\in D, \tag{1}$$

$$h(r, t, \tau)=\frac{\tilde{\alpha}'(r, \tau)}{\tilde{\alpha}(r, \tau)-\tilde{\alpha}(r, t)}-\frac{1}{\tau-t},\ t\in T,\ \tau\in T, \tag{2}$$

где $\tilde{\alpha}(r, t)=\omega_r^{-1}(\alpha(rt))$. Такие интегральные преобразования применяются при исследовании граничных задач для эллиптических уравнений (см. ([1]), ([2])). Везде в тексте $\| \|_p$—норма в пространетве L^p, а $\| \|_{H(\mu)}$—норма в пространстве $H(\mu)$.

2. Лемма 1. *Существует постоянная C, не зависящая от $t\in T$ и $z\in D$, такая, что* $|k(t, z)|<C((1-|z|^2)|t-z|^{-2}+|t-z|^{\lambda-1})$.

Доказательство. Из определения функции $k(t, z)$ имеем $k(t, z)=k_1(t, z)\cdot k_2(t, z)$, где $k_1(t, z)=\alpha'(t)(t-z)-\alpha(t)+\alpha(z)$, $k_2(t, z)=$ $=(\alpha(t)-\alpha(z))(t-z)^{-1}$. Полагая $z=r\tau$, где $|\tau|=1$, будем иметь

$$k_1(t, z)=\alpha'(t)(t-\tau)+\alpha'(t)(\tau-r\tau)+\alpha(\tau)-\alpha(t)+\alpha(r\tau)-\alpha(\tau).$$

Так как

$$\alpha'(t)(t-\tau)=-\int_t^\tau \alpha'(t)du,\quad \alpha(\tau)-\alpha(t)=\int_t^\tau \alpha'(u)du,$$

то

$$k_1(t, z) = \alpha'(t)(\tau - r\tau) + \alpha(r\tau) - \alpha(\tau) + \int\limits_t^{\tau} (\alpha'(u) - \alpha'(t))du.$$

Из свойств функции $\alpha(z)$ следует, что имеют место оценки $|\alpha'(u) - \alpha'(t)| < C_1|u-t|^{\lambda}$, $|\alpha'(t)(\tau - r\tau)| < C_2(1-|z|)$, $|\alpha(r\tau) - \alpha(\tau)| < C_3(1-|z|)$ ($C_i = \mathrm{const}$, $i = 1, 2, 3$). Поэтому $|k_1(t, z)| < \mathrm{const}(1 - |z| + |t-z|^{1+\lambda})$. Учитывая, что $|k_2(t, z)| > \mathrm{const} \cdot |t-z|$, $t \in T$, завершаем доказательство леммы.

Для любого $f(t) \in L^1(T)$ положим

$$(Tf)(z) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_T k(t, z) f(t) dt, \quad z \in D.$$

Из леммы 1 непосредственно следует

Теорема 1. *Пусть $f(t) \in L^1(T)$. Существует постоянная C, не зависящая от f и r ($0 < r < 1$), такая, что* $\|(Tf)(rt)\|_1 \leqslant C\|f\|_1$.

3. Лемма 2. *Существует постоянная C, не зависящая от r ($0 < r < 1$), такая, что* $\|\omega_r'(t)\|_2 \leqslant C$.

Доказательство. Пусть $z \in \Gamma_r$ произвольная точка. Обозначим $\theta_r(z)$ угол между касательной кривой Γ_r в точке z и вещественной осью. Из параметрического уравнения кривой Γ_r имеем

$$\theta_r(\alpha(rt)) = \arg\alpha'(rt) + \arg t + \frac{\pi}{2} \quad (0 < r \leqslant 1, \ t \in T). \tag{3}$$

Так как $|\arg\alpha'(rt) - \arg\alpha'(t)| < \mathrm{const}(1-r)^{\lambda}$, то, учитывая (3), получим $|\theta_r(\alpha(rt)) - \theta_1(\alpha(t))| < \mathrm{const}(1-r)^{\lambda}$.

Учитывая, что $|\alpha(rt) - \alpha(t)| < \mathrm{const}(1-r)$, можем утверждать, что семейство кривых Γ_r равномерно стремится к единичной окружности T. Поэтому функции $\omega_r(z)$ равномерно на D стремятся к фукции z при $r \to 1-0$ (см. ([3])). Следовательно, для заданного $\varepsilon > 0$ r_0 ($r_0 < 1$) можно выбрать так, чтобы имело место

$$|\omega_r(\alpha(t)) - \alpha(t)| < \varepsilon, \ t \in T, \tag{4}$$

при $r_0 \leqslant r \leqslant 1$. Можно также считать, что если $r_0 \leqslant r \leqslant 1$, и $t \in T$, то

$$|\alpha(rt) - \alpha(t)| < \varepsilon, \ |\arg\alpha'(rt) - \arg\alpha'(t)| < \varepsilon, \ |\theta_r(\alpha(rt)) - \theta_1(\alpha(t))| < \varepsilon. \tag{5}$$

Так как $\omega_r(\alpha(t)) \in \Gamma_r$, то для некоторого $t' \in T$ $\omega_r(\alpha(t)) = \alpha(rt')$. Из первого неравенства (5) и из (4) следует, что $|\alpha(t) - \alpha(t')| \leqslant |\alpha(t) - \omega_r(\alpha(t))| + |\alpha(rt') - \alpha(t')| < 2\varepsilon$. Учитывая, что $|t - t'| < M_1|\alpha(t) - \alpha(t')|$ для некоторой постоянной M_1, не зависящей от t, $t' \in T$, получим $|t - t'| < 2M_1\varepsilon$. В силу равенства (3)

$$\begin{aligned} |\theta_r(\omega_r(\alpha(t)) - \theta_r(\alpha(rt))| &= |\theta_r(\alpha(rt')) - \theta_r(\alpha(rt))| \leqslant |\arg\alpha'(rt') - \\ - \arg\alpha'(rt)| + |\arg t - \arg t'| &\leqslant |\arg\alpha'(rt') - \arg\alpha'(t')| + |\arg\alpha'(rt) - \\ - \arg\alpha'(t)| + |\arg\alpha'(t') - \arg\alpha'(t)| &+ |\arg t - \arg t'| < M\varepsilon, \end{aligned} \tag{6}$$

где $M = \mathrm{const}$. Далее, по теореме Линделефа (см. ([4])) $\arg\omega_r'(\alpha(t)) = \theta_r(\omega_r(\alpha(t)) - \arg\alpha(t) - \pi/2$, где $\omega_r'(\alpha(t))$ предельное значение функции $\omega_r'(z)$ при $z \to \alpha(t)$ по некасательным путям. Поэтому, учитывая (6) и (5), $|\arg\omega_r'(\alpha(t))| < M \cdot \varepsilon + |\theta_r(rt)) - \arg\alpha(t) - \pi/2| = M\varepsilon + |\theta_r(\alpha(rt)) - \theta_1(\alpha(t))| \leqslant$

$\leq (M+1)\varepsilon$. Пусть $\varepsilon>0$ выбрано так, чтобы выполнялось соотношение $(M+1)\varepsilon<\pi/6$. Тогда справедливо неравенство

$$|\arg\omega_r'(t)|<\pi/3,\quad t\in T,\quad r_0\leq r\leq 1. \tag{7}$$

Рассмотрим функцию $F_r(z)=\exp(\ln|\omega_r'(z)|+i\arg\omega_r'(z))$. Для любого ρ $(0<\rho<1)$ имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=\rho}(F_r(\rho z))^2\frac{dz}{z}=(F_r(0))^2.$$

Отделяя в последнем равенстве вещественные части, получим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\omega_r'(\rho e^{i\theta})|^2\cos(2\arg\omega_r'(\rho e^{i\theta}))d\theta=\mathrm{Re}(F_r(0))^2.$$

Так как согласно (7) для некоторого $\rho_0<1$ $\cos(2\arg\omega_r'(\rho e^{i\theta}))>1/2$, если $\rho_0\leq\rho\leq 1$, то

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\omega_r'(\rho e^{i\theta})|^2d\theta<2\mathrm{Re}(F_r(0))^2.$$

Для завершения доказательства леммы следует заметить, что величины $F_r(0)=\omega_r'(0)$ равномерно ограничены при $0<r\leq 1$ (см. [4]).

4. Пусть $z, z'\in\Gamma_r$ произвольные точки. Через $s(z,z')$ обозначим длину дуги кривой Γ_r между точками z, z'. Если $z=\alpha(rt)$, $z'=\alpha(rt')$, то из свойств функции $\alpha(z)$ следует, что $s(\alpha(rt),\alpha(rt'))\approx|t-t'|$. Поэтому в силу (3) $|\theta_r(\alpha(rt))-\theta_r(\alpha(rt'))|\leq C|t-t'|^\lambda$, где C—постоянная, не зависящая от r. Тем самым для любых точек $z, z'\in\Gamma_r$ имеет место оценка

$$|\theta_r(z)-\theta_r(z')|<C_1(s(z,z'))^\lambda, \tag{8}$$

где C_1—постоянная, не зависящая от r.

Лемма 3. *Функции $\omega_r'(t)$ равномерно ограничены в пространстве $H(\lambda)$.*

Доказательство. Применяя теорему Линделефа, оценку (8) и лемму 2, получим

$$|\arg\omega_r'(t)-\arg\omega_r'(t')|\leq|\theta_r(\omega_r(t))-\theta_r(\omega_r(t'))|+|\arg t-\arg t'|<$$
$$<C_1 s(\omega_r(t),\omega_r(t'))+|t-t'|$$

$$s(\omega_r(t),\omega_r(t'))=\int\limits_{tt'}|\omega_r'(t)||dt|<\|\omega_r'(t)\|_2\cdot|t-t'|^{1/2}. \tag{9}$$

Поэтому $|\arg\omega_r'(t)-\arg\omega_r'(t')|<\mathrm{const}|t-t'|^{\lambda/2}$. Из последней оценки в частности следует, что функции $\omega_r'(t)$ равномерно ограничены. Применяя еще раз оценку (9), завершаем доказательство леммы.

Лемма 4. *Пусть $\mu<\lambda$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует $r_0<1$ такое что, если $r_0\leq r\leq 1$, то $|\omega_r(t)-1|<\varepsilon$, $\|\omega_r'(t)-1\|_{H(\mu)}<\varepsilon$.*

Доказательство. Из леммы 3 следует, что функции $\omega_r'(t)$,

$0<r\leqslant 1$ равномерно ограничены и равномерно непрерывны в D. Поэтому можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность на T (см. ([3])). Учитывая, что в круге D функции $\omega_r'(z)$ равномерно стремятся к 1, получим доказательство первого утверждения леммы. Далее, из леммы 3 следует, что $|\arg\omega_r'(e^{i\theta})-\arg\omega_r'(e^{i\theta_1})|\cdot|\theta-\theta_1|^{-\mu}<$ $<K|\theta-\theta_1|^{\lambda-\mu}$, $K=\mathrm{const}$. Поэтому $|\arg\omega_r'(e^{i\theta})-\arg\omega_r'(e^{i\theta})|\,|\theta-\theta_1|^{-\mu}<\varepsilon$ при $|\theta-\theta_1|<(\varepsilon K^{-1})^{(\lambda-\mu)^{-1}}$. Если $|\theta-\theta_1|>(\varepsilon K^{-1})^{(\lambda-\mu)^{-1}}$, то в силу первого утверждения леммы $r_0<1$ можно выбрать так, чтобы для любого r, $r_0\leqslant r\leqslant 1$, имело место

$$|\arg\omega_r'(e^{i\theta})|<\frac{\varepsilon}{2}(\varepsilon\cdot K^{-1})^{(\lambda-\mu)^{-1}}.$$

В силу этих неравенств при $r_0\leqslant r\leqslant 1$ будем иметь $|\arg\omega_r'(e^{i\theta}))-$ $-\arg\omega_r'(e^{i\theta_1})|<\varepsilon|\theta-\theta_1|^{\mu}$, для любого $\theta,\theta'\in[0,2\pi]$. Применяя снова первое утверждение, получим доказательство второго утверждения леммы.

5. Лемма 5. *Пусть $\lambda<\mu$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует $r_0<1$, такое, что если $r_0\leqslant r<1$, то $h(r,t,\tau)-h(1,t,\tau)=\tilde h(r,t,\tau)|\tau-$ $-t|^{\mu-1}$, где $\tilde h(r,t,t)=0$, $\|\tilde h(r,t,\tau)\|_{H(\lambda-\mu)}<\varepsilon$, по обеим переменным $t,\tau\in T$.*

Доказательство. Так как $\omega_1(z)\equiv z$, то $h(1,t,\tau)=\alpha'(\tau)(\alpha(\tau)-$ $-\alpha(t))-(\tau-t)^{-1}$. Поэтому $h(r,t,\tau)-h(1,t,\tau)=h^{(1)}(r,t,\tau)+h^{(2)}(r,t,\tau)$, где

$$h^{(1)}(r,t,\tau)=\frac{(\omega_r^{-1}(\alpha(r\tau))'\alpha'(r\tau)(\alpha(r\tau)-\alpha(rt))-\alpha'(r\tau)(\omega_r^{-1}(\alpha(r\tau))-\omega_r^{-1}(\alpha(rt)))(\tau-t)^{-1}}{(\omega_r(\alpha(r\tau))-\omega_r(\alpha(r\tau)))(\alpha(r\tau)-\alpha(rt))(\tau-t)^{-1}};\tag{10}$$

$$h^{(2)}(r,t,r)=\frac{(\alpha'(r\tau)(\alpha(\tau)-\alpha(t))-\alpha'(\tau)(\alpha(r\tau)-\alpha(rt)))(\tau-t)^{-2}}{(\alpha(r\tau)-\alpha(rt))(\alpha(\tau)-\alpha(t))(\tau-t)^{-2}}.\tag{11}$$

Учитывая лемму 4, для заданного $\varepsilon>0$ $r_0<1$ можем выбрать так, чтобы имели место соотношения $(\omega_r^{-1}(z))'=1+\Omega_r^{(1)}(z)$, $\omega_r^{-1}(z)=z+\Omega_r(z)$ $\|\Omega_r^{(1)}(t)\|_{H(\mu)}<\varepsilon$, $\|\Omega_r(t)\|_{H(1)}<\varepsilon$, при $r_0\leqslant r\leqslant 1$. Числитель дроби (10) обозначим $J^{(1)}(r,t,\tau)$. Ясно, что $J^{(1)}(r,t,t)=0$ и

$$J^{(1)}(r,t,\tau)=\Omega_r^{(1)}(\alpha(r\tau))\frac{\alpha(r\tau)-\alpha(rt)}{\tau-t}-\frac{\tau\ln\frac{t}{\tau}}{\tau-t}\int_0^1\Omega_r^{(1)}\left(\alpha\left(r,\tau\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha}\right)\right)d\alpha$$

Функции $(\alpha(r\tau)-\alpha(rt))(\tau-t)^{-1}$ равномерно ограничены в пространстве $H(\lambda)$, следовательно $r_0<1$ можно выбрать так, чтобы имело место $\|J^{(1)}(r,t,\tau)\|_{H(\lambda)}<\varepsilon$, при $r_0\leqslant r\leqslant 1$. Далее, замечая, что функции $(\omega_r(\alpha(r\tau))-\omega_r(\alpha(rt)))(\alpha(r\tau)-\alpha(rt))(\tau-t)^{-2}$ ограничены снизу в пространстве $H(\lambda)$, справедливо представление $h^{(1)}(r,t,\tau)=\tilde h^{(1)}(r,t,\tau)\,|\tau-t|^{\mu-1}$, где $\tilde h^{(1)}(r,t,t)=0$, $\|\tilde h^{(1)}(r,t,\tau)\|_{H(\lambda-\mu)}<\varepsilon$, при $r_0\leqslant r\leqslant 1$. Аналогичное равенство можно установить и для функции $h^{(2)}(r,t,\tau)$. Лемма доказана.

6. Рассмотрим следующие преобразования:

$$(H_r f)(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_T h(r, t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad r \leq 1, \quad f(\tau) \in L^1(T). \tag{12}$$

Теорема 2. *Операторы H_r (определенные формулой* (12)) *обладают следующими свойствами:* а) *существует постоянная C, не зависящая от r, такая, что $\|H_r f\|_p < C \|f\|_1$, где $p < (1-\lambda)^{-1}$;* б) *если $f(t) \in L^1(T)$, то $\|H_r f - H_1 f\|_p \to 0$ при $r \to 1-0$ по норме пространства L^p, $p < (1-\lambda)^{-1}$.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы следует из оценки $|h(r, t, \tau)| < \text{const} |\tau - t|^{\lambda-1}$. Так как

$$|(H_r f)(t) - (H_1 f)(t)| \leq \int\limits_T |h(r, t, \tau) - h(1, t, \tau)| (f(\tau)| |d\tau|,$$

то доказательство второго утверждения теоремы следует из леммы 5.

Теорема 3. *Если $f(t) \in H(\mu)$, $\mu < \lambda$, то $\|H_r f - H_1 f\|_{H(\mu)} \to 0$ при $r \to 1-0$.*

Доказательство. Пусть $\mu_1 < \lambda - \mu$. Применяя лемму 5, получим

$$(H_r f)(t) - (H_1 f)(t) = \int\limits_T \frac{\bar{h}(r, t, \tau)}{|\tau - t|^{1-\mu_1}} f(\tau) d\tau,$$

причем $\bar{h}(r, t, t) = 0$ и $\bar{h}(r, t, \tau) \to 0$ по обеим переменным при $r \to 1-0$ по норме $H(\mu)$. Для заданного $\varepsilon > 0$ $r_0 < 1$ можно выбрать так, чтобы имели место оценки $|\bar{h}(r, t, \tau)| \tau - t|^{-\mu}| < \varepsilon$ и $|\bar{h}(r, t_1, \tau) - \bar{h}(r, t_2, \tau)| < \varepsilon |t_1 - t_2|^{\mu}$ (см. ([3])), лишь только $r_0 \leq r \leq 1$. Далее имеем

$$|((H_r f)(t_1) - (H_1 f)(t_1)) - ((H_r f)(t_2) - (H_1 f)(t_2))| \leq$$

$$\leq \int\limits_T \frac{|\bar{h}(r, t_1, \tau) - \bar{h}(r, t_2, \tau)|}{|\tau - t_1|^{1-\mu_1}} |f(\tau)| |d\tau| +$$

$$+ \int\limits_T \frac{|\bar{h}(r, t_1, \tau)|}{|\tau - t_1|^{\mu}} \frac{||\tau - t_1|^{1-\mu_1} - |\tau - t_2|^{1-\mu_1}|}{|\tau - t_1|^{1-\mu-\mu_1} |\tau - t_2|^{1-\mu_1}} |f(\tau)| |d\tau| < C \cdot \varepsilon |t_1 - t_2|^{\mu}.$$

где C—постоянная, не зависящая от r. Теорема доказана.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Հ. Մ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ

Որոշ ինտեգրալ ձևափոխությունների սահմանափակության մասին

Դիցուք D-ն միավոր շրջանն է, T-ն միավոր շրջանագիծը, իսկ $\alpha(z)$-ը D-ն իրեն վրա արտապատկերող հոմեոմորֆիզմ է։ Ցանկացած r-ի համար $(0 < r \leq 1)$ $\Gamma_r \subset D$ *նշանակենք* $z = \alpha(rt)$, $t \in T$, *պարամետրական հավասարումով որոշվող փակ կորը։ Γ_r կորով սահմանափակված տիրույթը միավոր շրջանի վրա արտապատկերող ֆունկցիան նշանակենք* $\omega_r(z)$, $\omega_r(0) = 0$ $\omega_r'(0) > 0$: *Աշխատանքում հետազոտվում է ինտեգրալ ձևափոխություններ*

$$K(t, z)=\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)-\alpha(z)}-\frac{1}{t-z}, \quad t\in T, \quad z\in D,$$

$$h(r, t, \tau)=\frac{\tilde{\alpha}'(r, \tau)}{\tilde{\alpha}(r, \tau)-\tilde{\alpha}(r, t)}-\frac{1}{\tau-t}, \quad t\in T, \quad \tau\in T,$$

կորիզներով, որտեղ $\tilde{\alpha}(r, t)=\omega_r^{-1}(\alpha(rt))$:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Р. А. Алиханян*, Изв. АН АрмССР. Сер. мат., т. 18, № 1 (1983). [2] *Г. М. Айрапетян*, Изв. АН АрмССР. Сер. мат., т. 22, № 3 (1987). [3] *Г. М. Голузин*, Геометрическая теория функций комплексного переменного, Наука. М., 1966. [4] *М. А. Лаврентев, Б. В. Щабат*, Методы теории функций комплексного переменного, М., Физматгиз, 1958. [5] *Н. И. Мусхелишвили*, Сингулярные интегральные уравнения, Наука, М., 1968.