ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 91 1990 №1

УДК 539.374

МЕХАНИКА

Академик АН Армении Н. Х. Арутюнян, Ю. Н. Радаев

Об условиях на границах раздела в упругопластических телах

(Представлено 19/III 1990)

Граничная задача теории течения упругопластических тел является нелинейной задачей с неизвестной границей раздела упругой и пластической зон ([1], [2]). В ([3]) условия на упругопластической границе формулируются в виде условий непрерывности вектора скорости перемещений и полного тензора напряжений. Последовавшие доказательства теоремы единственности для граничной задачи теории течения также включали эти условия как достаточные для единственности ([4], [5]).

Ниже рассматриваются следующие условия на границе раздела упругой и пластической зон: задается скачок полного тензора напряжений, вектор скорости перемещений полагается непрерывным. Приводятся условия, которым должен удовлетворять скачок тензора напряжений на упругопластической границе, достаточные для единственности решения граничной задачи теории течения. Доказывается, что задание скачка тензора напряжений на границе раздела является также и необходимым условием единственности.

Пусть неупрочняющееся упругопластическое тело деформируется под действием приложенных поверхностных сил и заданных поверхностных перемещений из естественного состояния (область, занимаемую телом в этом состоянии обозначим через V, $S=\partial V$). Введем следующие обозначения: x_m — декартовы координаты пространства, σ_{ij} — тензор напряжений, ε_{ij} — тензор малых деформаций, u_i — поле перемещений, Λ — параметр нагружения $(\Lambda \in I \equiv (\Lambda_0, \Lambda_*))$, $v_i = \dot{u}_i$ (точкой обозначается частное дифференцирование по Λ), $\varepsilon = 1/3\varepsilon_{mm}$, $\sigma \equiv 1/3\sigma_{mm}$, $\varepsilon'_{ij} \equiv \varepsilon_{ij} - \varepsilon\delta_{ij}$, $\sigma'_{ij} \equiv \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$, $f(\sigma_{ij}) = k$ — уравнение регулярной поверхности текучести. Для текущего значения Λ упругая зона, пластическая зона, зона пластического течения и зона разгрузки определяются соответственно равенствами ([1]):

$$V_e = \{x_k \in V: \ f(\sigma_{ij}) < k\}, \quad V_p = \{x_k \in V: \ f(\sigma_{ij}) = k\},$$

$$V'_p = \{x_k \in V_p: \ df(\sigma_{ij}) = 0\}, \quad V''_p = \{x_k \in V_p: \ df(\sigma_{ij}) < 0\}.$$

Граничная задача теории неустановившегося течения неупрочняющихся упругопластических тел заключается в нахождении полей $\sigma_{ij}(x_k, \Lambda)$, $\varepsilon_{ij}(x_k, \Lambda)$, $u_i(x_k, \Lambda)$, $v_i(x_k, \Lambda)$, удовлетворяющих следующим уравнениям, начальным и граничным условиям ([1]):

$$\sigma_{ij,j}=0 \quad (x_k \in V,\quad \Lambda \in I) \tag{1}$$

$$d\varepsilon'_{ij}=(2G)^{-1}d\sigma'_{ij}+(\partial f/\partial\sigma_{ij})d\lambda \quad (x_k \in V'_p,\ \Lambda \in I) \tag{2}$$

$$d\varepsilon'_{ij}=(2G)^{-1}d\sigma'_{ij} \quad (x_k \in V_e \cup V''_p,\ \Lambda \in I) \tag{3}$$

$$d\varepsilon=E^{-1}(1-2\nu)d\sigma \quad (x_k \in V,\ \Lambda \in I) \tag{4}$$

$$\varepsilon_{ij}=1/2(u_{i,j}+u_{j,i}) \quad (x_k \in V,\ \Lambda \in I) \tag{5}$$

$$f(x_k,\ \Lambda) \le 0 \quad (x_k \in V,\ \Lambda \in I) \tag{6}$$

$$u_i|_{\Lambda=\Lambda_0}=0,\ \varepsilon_{ij}|_{\Lambda=\Lambda_0}=0, \sigma_{ij}|_{\Lambda=\Lambda_0}=0 \quad (x_k \in V) \tag{7}$$

$$u_i=U_i \quad (x_k \in S_U,\ \Lambda \in I),\quad \sigma_{ij}l_j=F_i \quad (x_k \in S_F,\ \Lambda \in I), \tag{8}$$

где l_j — компоненты единичного вектора внешней нормали к поверхности S; U_i, F_i — заданные функции x_k, Λ: $U_i|_{\Lambda=\Lambda_0}=0$, $F_i|_{\Lambda=\Lambda_0}=0$.

Условия на поверхности раздела Σ упругой и пластической зон примем в следующем виде:

$$[v_i]=0,\ [\sigma_{ij}]=A_{ij},\ A_{ij}\nu_j=0 \quad (x_k \in \Sigma,\ \Lambda \in I), \tag{9}$$

где в общем случае $A_{ij} \neq 0$ (ν_j — единичный вектор нормали к поверхности Σ, направленный в сторону движения Σ при возрастании Λ). Условия (9) на упругопластической границе оправданы, только если они обеспечивают единственность решения граничной задачи (1)—(9).

Для доказательства единственности поля напряжений достаточно доказать, что для каждого Λ сформировавшиеся распределения напряжений $\sigma_{ij}(x_k, \Lambda)$, деформаций $\varepsilon_{ij}(x_k, \Lambda)$ и перемещений $u_i(x_k, \Lambda)$, а также произвольное неотрицательное поле $d\lambda(x_k, \Lambda)$ однозначно определяют приращения $d\sigma_{ij}(x_k, \Lambda)$ в соответствии с уравнениями равновесия $\{d\sigma_{ij}(x_k, \Lambda)\}_{,j}=0$ $(x_k \in V)$, уравнениями (2)—(4) и граничными условиями $l_j d\sigma_{ij}=dF_i$ $(x_k \in S_F)$, если, конечно, существует по крайней мере одно поле $du_i(x_k, \Lambda)$, такое, что

$$d\varepsilon_{ij}=1/2(du_{i,j}+du_{j,i}) \quad (x_k \in V),\quad du_i=dU_i \quad (x_k \in S_U)$$

$$[du_i]=0 \qquad (x_k \in \Sigma).$$

Для альтернативных распределений приращений напряжений и деформаций рассмотрим интеграл [4]

$$J=\int_V (d\sigma^{**}_{ij}-d\sigma^{*}_{ij})(d\varepsilon^{**}_{ij}-d\varepsilon^{*}_{ij})dx_1dx_2dx_3.$$

Следуя [1], можно показать, что $J>0$, если хотя бы в одной точке области V: $d\sigma^{**}_{ij} \neq d\sigma^{*}_{ij}$. С другой стороны, интеграл J приводится к виду (если только $[du^{*}_i]=0$, $[du^{**}_i]=0$):

$$J=-\int_\Sigma (du^{**}_i-du^{*}_i)([d\sigma^{**}_{ij}]-[d\sigma^{*}_{ij}])\nu_j d\Sigma.$$

Единственность приращений $d\sigma_{ij}$ будет доказана, если потребовать, чтобы этот поверхностный интеграл исчезал. Для этого достаточно, чтобы на границе раздела выполнялись условия $[d\sigma^{*}_{ij}]\nu_j=c_i$, $[d\sigma^{**}_{ij}]\nu_j=c_i$ $(x_k \in \Sigma,\ \Lambda \in I)$.

Таким образом, достаточными для единственности напряжений являются следующие условия на неизвестной границе раздела:

$$[v_i]=0,\ [\sigma_{ij}]=A_{ij},\ A_{ij}\nu_j=0,\ [\partial\sigma_{ij}/\partial\Lambda]\nu_j=c_i, \tag{10}$$

где $c_i(x_k, \Lambda)$—заданные функции. Учитывая условия совместности [6], последнюю из формул (10) представим в виде

$$-B_{ij}\nu_j C+\nu_j\delta A_{ij}/\delta\Lambda=c_i \quad (x_k\in\Sigma,\ \Lambda\in I), \tag{11}$$

где $B_{ij}=[\partial\sigma_{ij}/\partial x_k]\nu_k$, C — скорость распространения границы раздела в направлении нормали ν_i, $\delta/\delta\Lambda$ —оператор дельта-дифференцирования [8].

Заметим, что хотя равенство $c_i=0$ не является следствием условия $[\sigma_{ij}]\nu_j=0$ или даже более сильного условия $[\sigma_{ij}]=0$, при доказательстве теоремы единственности всегда предполагалось [1], что $A_{ij}=0$, $c_i=0$.

Докажем, что задание скачка полного тензора напряжений на границе раздела является необходимым условием для выделения единственного по напряжениям решения граничной задачи (1)—(8) на классе решений с непрерывными в V полями скорости.

Рассмотрим упругопластическую задачу об одноосном растяжении несжимаемого образца с симметричными боковыми вырезами в условиях плоской деформации. Положим $\Lambda=F$, где F—величина растягивающего усилия, отнесенная к единице площади. Предположим, что построены непрерывные распределения напряжений и скоростей $\sigma_{\varkappa\mu}(x_\gamma, F)$, $v_\mu(x_\gamma, F)$ (γ, $\varkappa$, $\mu=1,2$). Задача плоского неустановившегося течения является гиперболической в пластической зоне, и линии скольжения в некотором месте пересекают дважды упругопластическую границу (рис. 1), если только для текущего значения F задача статически неопределима [1]. Пусть Q_1Q_3Q—характерис-

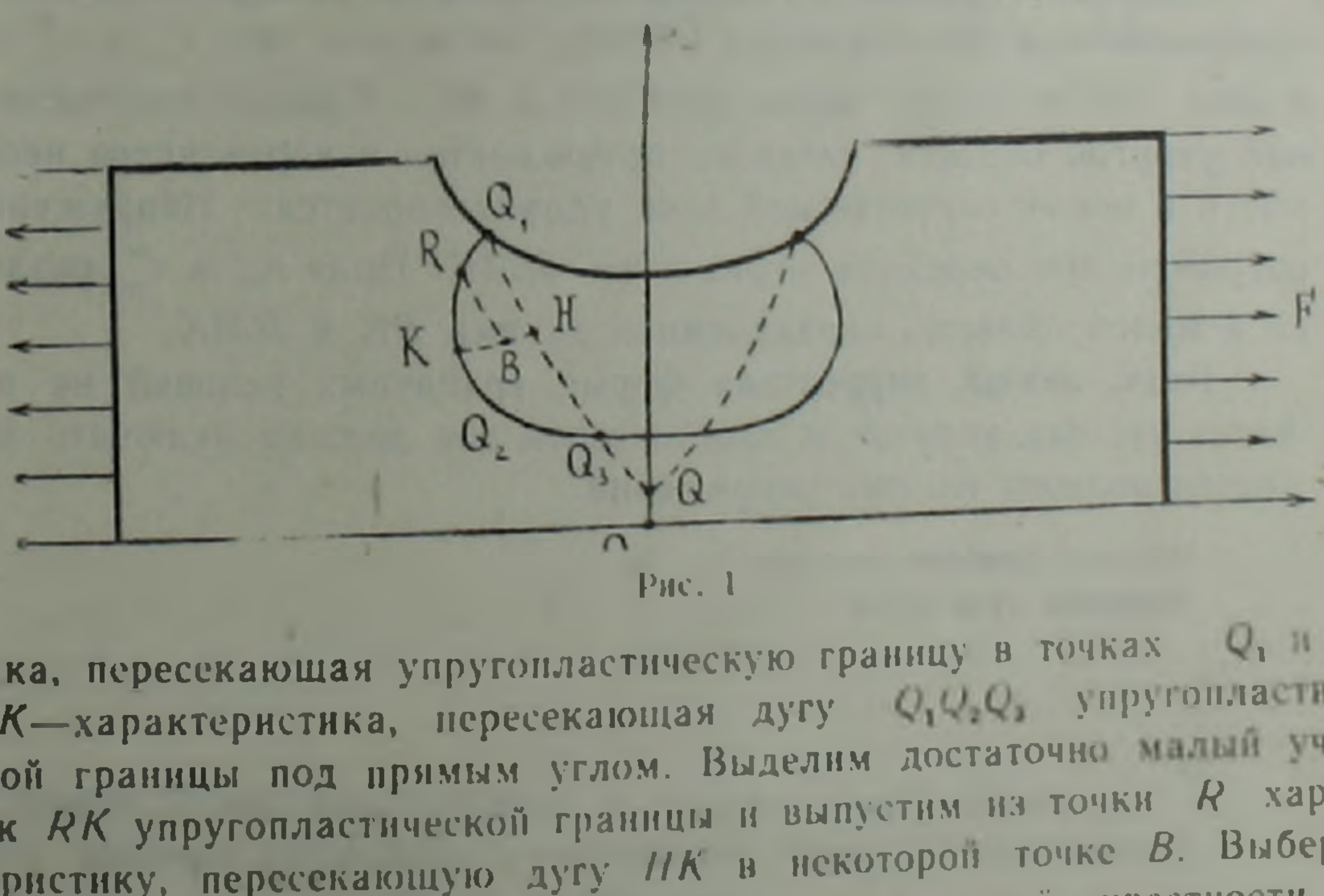

Рис. 1

тика, пересекающая упругопластическую границу в точках Q_1 и Q_3, HK—характеристика, пересекающая дугу $Q_1Q_2Q_3$ упругопластической границы под прямым углом. Выделим достаточно малый участок RK упругопластической границы и выпустим из точки R характеристику, пересекающую дугу HK в некоторой точке B. Выберем гладкую дугу RMK так, чтобы она лежала в малой окрестности дуги RK со стороны упругой зоны и касательные к дугам RK и RMK в точках R и K совпадали (рис. 2).

Построим поля $\sigma^*_{\alpha\beta}(x_\gamma, F)$, $v^*_\mu(x_\gamma, F)$ следующим образом. Всюду, исключая криволинейный треугольник $RMKB$, $\sigma^*_{\alpha\beta}=\sigma_{\alpha\beta}$, $v^*_\mu=v_\mu$.

В криволинейном треугольнике $RMKB$ поля $\sigma^*_{11}=-p^*-k\sin 2\varphi^*$,

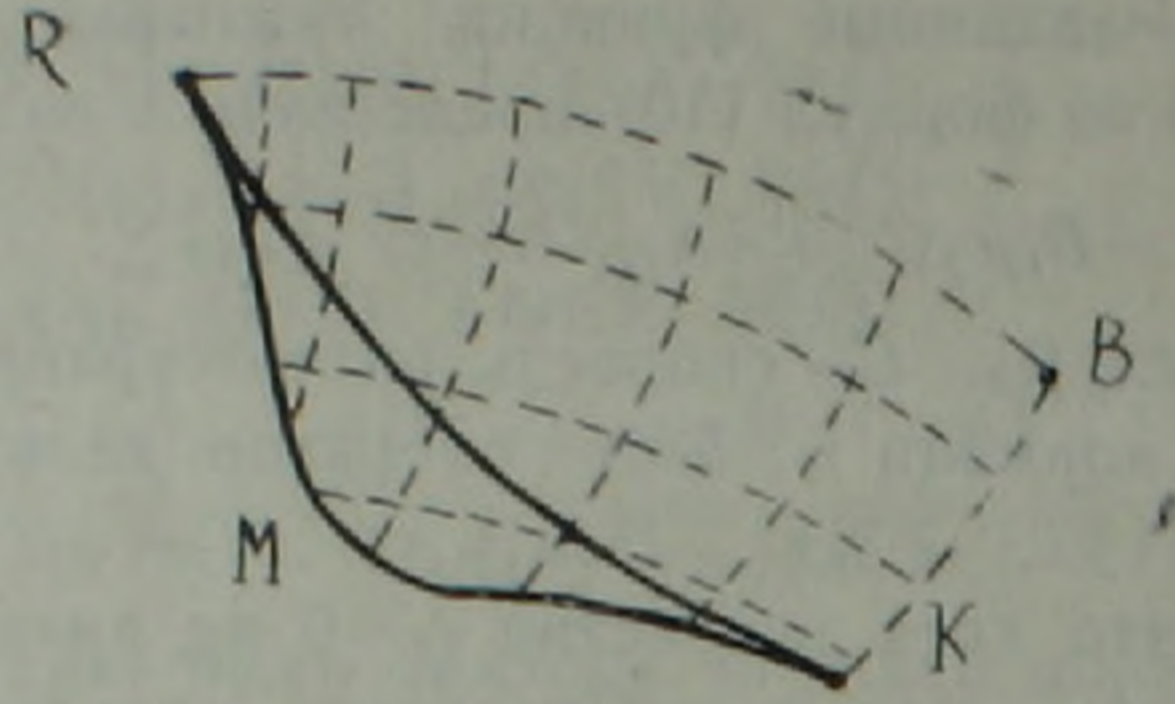

Рис. 2

$\sigma^*_{22}=-p^*+k\sin 2\varphi^*$, $\sigma^*_{12}=k\cos 2\varphi^*$, v^*_μ определим как решение задачи Коши для гиперболической системы

$$p^*_{,1}+2k\cos 2\varphi^*\varphi^*_{,1}+2k\sin 2\varphi^*\varphi^*_{,2}=0$$

$$p^*_{,2}+2k\sin 2\varphi^*\varphi^*_{,1}-2k\cos 2\varphi^*\varphi^*_{,2}=0$$

$$v^*_{1,1}+v^*_{2,2}=0, \qquad \frac{v^*_{1,2}-v^*_{2,1}+2kG^{-1}\sin 2\varphi^*\varphi^{*\cdot}}{v^*_{1,1}-v^*_{2,2}+2kG^{-1}\cos 2\varphi^*\varphi^{*\cdot}}=\operatorname{ctg} 2\varphi^*$$

с начальными данными на дуге RMK (ν^*_j — вектор единичной нормали к этой дуге):

$$-(p^*+k\sin 2\varphi^*)\nu^*_1+k\cos 2\varphi^*\nu^*_2=\sigma_{1\mu}\nu^*_\mu$$

$$k\cos 2\varphi^*\nu^*_1-(p^*-k\sin 2\varphi^*)\nu^*_2=\sigma_{2\mu}\nu^*_\mu, \quad v^*_\alpha=v_\alpha.$$

Решение указанной задачи существует и определено всюду в криволинейном треугольнике $RMKB$. Очевидно, что $\sigma^*_{\alpha\mu}$ и v^*_μ непрерывны при переходе через дуги RB и BK. Предел текучести в новой упругой области нигде не превышается и неравенство необратимости в новой пластической зоне удовлетворяется. Напряжения $\sigma^*_{\alpha\mu}$ разрывны при переходе через дугу RMK. Поля $\sigma_{\alpha\mu}$ и $\sigma^*_{\alpha\mu}$ различаются в малой области, ограниченной дугами RK и RMK.

Итак, любая корректная форма граничных условий на поверхности раздела упругой и пластической зон должна включать задание скачка полного тензора напряжений.

Институт проблем механики
Академии наук СССР

Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս Ն. Խ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, ՅՈՒ. Ն. ՌԱԲՈՏՆՈՎ

Առաձգապլաստիկական մարմիններում բաժանման եզրագծի վրա պայմանների մասին

Առաձգական և պլաստիկական գոտիների բաժանման եզրի վրա մտցված են հատուկ պայմաններ՝ տրվում են լարումների լրիվ տենզորի թռիչքները։

երբ տեղափոխությունների արագությունների վեկտորը անընդհատ է, լարում-ների տենզորի թռիչքները չեն կարող ընտրվել անկախորեն։ Բերվում են պայ-մաններ, որոնց պետք է բավարարեն լարումների տենզորի թռիչքները ա-ռաձգապլաստիկական սահմանի վրա։ Այդ պայմանները բավարար են հոսու-նության տեսության եզրային խնդրի լուծման միակությունն ապացուցելու համար։

Ապացուցվել է, որ բաժանման եզրագծի վրա լարումների թռիչքի տալը հանդիսանում է նաև խնդրի լուծման միակության անհրաժեշտ պայման։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Р. Хилл,* Математическая теория пластичности, Гостехиздат, М., 1956. [2] *В. В. Соколовский,* Теория пластичности, Высшая школа, М., 1969. [3] *S. Sobolev.* Тр. Сейсмологического ин-та АН СССР, № 49 (1935). [4] *E. Melan,* Ing. Arch., B. 9. H. 2 (1938). [5] *H. J. Greenberg,* Quart, Appl. Math., v. 7, №1 (1949). [6] *Т. Тома,* Пластическое течение и разрушение в твердых телах, Мир, М., 1964.