ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 91 1990 №1

УДК 519.612

МАТЕМАТИКА

В. С. Торосян

Решение уравнения с почти теплицевой трехдиагональной матрицей

(Представлено чл.-корр. АН Армении А. Б. Нерсесяном 18/V 1990)

Введение. Для решения трехдиагональных систем существуют различные методы. Обычно используется метод прогонки, который требует, чтобы все главные миноры были отличны от нуля (в практике требуется, чтобы они не были «близки» к нулю). Поэтому, если заранее неизвестно, как будут изменяться значения главных миноров, целесообразно применить метод прогонки с выбором ведущего элемента. Ниже рассматриваются некоторые случаи трехдиагональных, близких к теплицевым, систем и приведен алгоритм, который с точки зрения накопления ошибок округления более предпочтителен, чем метод прогонки с выбором ведущего элемента, хотя реализация этого алгоритма требует выполнения несколько большего количества арифметических операций.

1. Рассмотрим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered} a_0x_1+b_0x_2=f_1 \\ c_1x_{i-1}+a_1x_i+b_1x_{i+1}=f_i \quad i=2,\ldots,n-1, \\ c_0x_{n-1}+d_0x_n=f_n \end{gathered} \tag{1}$$

матрица A которой невырождена и, как видим, отличается от трехдиагональной теплицевой матрицы лишь первой и последней строками. Не ограничивая общности, можно считать, что n—четное число. Метод прогонки без выбора ведущего элемента (см. [1]) здесь не всегда пригоден, так как может быть нарушено условие $a_0a_1-b_0c_1\neq 0$. Поэтому для решения данной системы следует применить метод прогонки с выбором ведущего элемента (см. [1]). Назовем его методом I. Одновременно решим эту систему и по методу II, который является модификацией подхода работы [2]. Алгоритм в этом случае примет следующий вид:

$$\alpha=\frac{a_1+\sqrt{a_1^2-4b_1c_1}}{2} \qquad \beta=\frac{1}{\alpha}$$

$$G(1)=f(1) \qquad G(n)=f(n)$$

$$G(2)=f(2)-\frac{a_1}{a_0}G(1) \qquad G(n-1)=f(n-1)-\frac{b_1}{d_0}G(n)$$

$$i=3,\ \dots,\ \frac{n}{2}$$

$$G(n+1-i)=f(n+1-i)-b_1G(n-i);$$

$$G(i)=f(i)-c_1G(i-1);$$

$$y\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{\alpha G\left(\frac{n}{2}+1\right)-c_1G\left(\frac{n}{2}\right)}{\alpha^2-c_1b_1}$$

$$y\left(\frac{n}{2}\right)=\frac{G\left(\frac{n}{2}\right)-b_1y\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\alpha}$$

$$i=1,\ \dots,\ \frac{n}{2}-2$$

$$y\left(\frac{n}{2}+i+1\right)=\left(G\left(\frac{n}{2}+i+1\right)-c_1y\left(\frac{n}{2}+i\right)\right);$$

$$y\left(\frac{n}{2}-i\right)=\left(G\left(\frac{n}{2}-i\right)-b_1y\left(\frac{n}{2}+1-i\right)\right);$$

$$y(1)=\frac{G(1)-b_0y(2)}{a_0}\qquad y(n)=\frac{G(n)-c_0y(n-1)}{d_0}$$

Обозначим через Z_1 решение системы $\tilde{A}Z_1=e_2$, через Z_2 решение системы $\tilde{A}Z_2=e_{n-1}$, где матрица $\tilde{A}$ отличается от исходной матрицы A системы (1) тем, что на (2.2) и $(n-1,\,n-1)$ местах стоит число $a_1+\alpha$. Пусть $Z_1=(Z^1(1),\ Z^1(2),\ \dots,\ Z^1(n))$, $Z_2=(Z^2(1),\ Z^2(2),\ \dots,\ Z^2(n))$. Тогда

$$x(n-1)=\frac{y(n-1)(1-\alpha Z^1(2))+\alpha Z^1(n-1)y(2)}{(1-\alpha Z^2(n-1))(1-\alpha Z^1(2))-\alpha^2Z^1(n-1)Z^2(2)}$$

$$x(2)=\frac{y(2)+\alpha Z^2(2)x(n-1)}{1-\alpha Z^1(2)}$$

$$x(1)=y(1)+\alpha x(2)Z^1(1)+\alpha x(n-1)Z^2(1) \tag{2}$$

$$x(n)=y(n)+\alpha x(2)Z^1(n)+\alpha x(n-1)Z^2(n)$$

$$i=3,\ \dots,\ n-2$$

$$x(i)=y(i)+\alpha x(2)Z^1(i)+\alpha x(n-1)Z^2(i)$$

2. Пусть P_n средняя относительная погрешность $P_n=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_0(i)-x(i))^2}$, где n порядок системы уравнений, а $x_0(i)$ $i=1,\dots,n$ точное решение. Для P и T_n (T_n — время реализации алгоритма на ЭВМ) в зависимости от n и чисел $a_0,\ b_0,\ a_1,\ b_1,\ c_1,\ c_0,\ d_0$ получены следующие результаты (численный эксперимент проведен на ПЭВМ „*Sakata*"). Всюду точным решением выбран вектор $x=(1,\dots,1)$ (т. е. $f_1=a_0+b_0$, $f_n=c_0+d_0$, $f_i=c_1+a_1+b_1$, $i=2,\dots,n-1$). Значения элементов матрицы следующие.

Случай №1. $a_0=-0{,}8$; $b_0=160$; $c_1=-0{,}01$; $a_1=2$, $b_1=1{,}6$; $c_0=1$; $d_0=0{,}8$.

Случай №2. $a_0=-0{,}8$; $b=1600$; $c_1=-0{,}001$; $a_1=2$; $b_1=1{,}6$; $c_0=1$; $d_0=0{,}8$.

Случай №3. $a_0=-0{,}8$; $b_0=16000$; $c_1=-0{,}0001$; $a_1=2$; $b_1=1{,}6$; $c_0=1$; $d_0=0{,}8$.

Результаты сведены в таблице.

Случай	Метод I	Метод II
№1	$P_{10}=1{,}22043\cdot10^{-3}$ $T_{10}=1c$ $P_{30}=1{,}22043\cdot10^{-3}$ $T_{30}=3c$ $P_{80}=1{,}22043\cdot10^{-3}$ $T_{80}=6c$	$P_{10}=5{,}208767\cdot10^{-8}$ $T_{10}=2c$ $P_{30}=5{,}208998\cdot10^{-8}$ $T_{30}=6c$ $P_{80}=5{,}208998\cdot10^{-8}$ $T_{80}=14c$
№2	$P_{10}=0{,}1351067$ $T_{10}=1c$ $P_{30}=0{,}1351068$ $T_{30}=2c$ $P_{80}=0{,}1351068$ $T_{80}=6c$	$P_{10}=1{,}907286\cdot10^{-8}$ $T_{10}=2c$ $P_{30}=1{,}907291\cdot10^{-8}$ $T_{30}=5c$ $P_{80}=1{,}907291\cdot10^{-8}$ $T_{80}=14c$
№3	$P_{10}=9{,}711317$ $T_{10}=1c$ $P_{30}=9{,}711317$ $T_{30}=3c$ $P_{80}=9{,}711317$ $T_{80}=6c$	$P_{10}=5{,}755348\cdot10^{-9}$ $T_{10}=2c$ $P_{30}=5{,}755348\cdot10^{-9}$ $T_{30}=6c$ $P_{80}=5{,}755348\cdot10^{-9}$ $T_{80}=14c$

Как видно из таблицы, при очень малых c_1 средняя относительная погрешность P_n при решении системы (1) по методу I может оказаться очень большой, в то время как метод II дает вполне удовлетворительнный результат. Решение по методу I требует $2n$ ячеек памяти и дополнительно один логический массив, а метод II—$3n$ ячеек памяти. Матрицу A можно представить в виде $A=T+e_1d_1+e_nd_n$, где T трехдиагональная теплицевая матрица, а d_1 и d_n вектор строки. Тогда уравнение (1) можно записать в виде

$$Tx+e_1d_1x+e_nd_nx=f.$$

Откуда

$$x=T^{-1}f-T^{-1}e_1d_1x-T^{-1}e_nd_n. \tag{3}$$

Числа d_1x и d_nx можно найти из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases}(1+d_1T^{-1}e_1)d_1x+(d_1T^{-1}e_n)d_nx=d_1T^{-1}f\\(d_2T^{-1}e_1)d_1x+(1+d_nT^{-1}e_n)d_nx=d_2T^{-1}f\end{cases}$$

Если используем формулы 5.11 (см. ([3])) для матрицы T^{-1}, то общее число арифметических операций для реализации формулы (3) оценивается величиной $O(n\log_2 n)$. Другие аналогичные подходы также не имеют преимущества перед методом II. Таким образом, метод II может быть рекомендован в случае, когда хотя бы одно из значений миноров $a_0a_1-b_0c_1$, $a_1d_0-c_0b_1$ близко к машинному нулю.

Институт механики
Академии наук Армении

Վ. Ս. ԹՈՐՈՍՅԱՆ

Համարյա տեպլիցյան երկժապավենային մատրիցայով հավասարման լուծումը

Աշխատանքում մշակված է ալգորիթմ, որը կլորացման սխալների կուտակման տեսակետից որոշակի դեպքում նախընտրելի է, քան հայտնի ալգորիթմները, չնայած պահանջում է մի փոքր ավելի թվաբանական գործողություններ: Բերված են թվային փորձարկումների արդյունքներ, որոնք հաստատում են տեսական եզրակացությունները:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. П. Ильин, Ю. И. Кузнецов,* Трехдиагональные матрицы и их приложение, Наука, М., 1985. [2] *А. Б. Нерсесян, В. А. Торосян,* Экономичные алгоритмы решения уравнений с матрицами двухленточного типа. Деп. в Арм. НИИНТИ № 64-Ар. 88. [3] *В. В. Воеводин, Е. Е. Тыртышников,* Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами, Наука, М., 1987.