ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 91 1990 № 1

УДК 519.61

МАТЕМАТИКА

Г. В. Агекян

Экономичный алгоритм решения задачи наименьших квадратов с матрицей малого теплицевого ранга

(Представлено чл.-корр. АН Армении А. Б. Нерсесяном 15 V 1990)

1°. Известно, что в случае матриц малого теплицевого ранга, обладающих невырожденными ведущими подматрицами, соответствующую алгебраическую систему можно решать применением экономичного алгоритма типа Левинсона (см. [1]). Алгоритм работы [2] более сложный, но уже освобожден от условия невырожденности ведущих подматриц и дает возможность эффективно решать задачу наименьших квадратов $Ax=b$ для блочной матрицы малого теплицевого ранга. В работе [3] показано, что при определенных дополнительных предположениях количество операций в алгоритме типа Левинсона можно существенно сократить. Матрицу, изучаемую в [3], можно представить в виде

$$A=\|a_{ij}\|;\ a_{ij}-a_{i-1,j-1}=\lambda^{(1)}_{i-1}\varkappa^{(1)}_{j-1}+\lambda^{(2)}_{i-1}\varkappa^{(2)}_{j-1},$$

где

$$a_{11}=1;\ \lambda^{(1)}_i=a_{i+1,1};\ \varkappa^{(1)}_j=a_{1,j+1}.$$

При этом показано, что существует алгоритм обращения этой матрицы (при условии отличия от нуля ведущих миноров) сложностью 3,5 n^2 вместо алгоритма [1] сложности $7n^2$.

Здесь и далее учитываются только мультипликативные операции над вещественными числами (в случае комплекснозначных матриц нетрудно привести соответствующие оценки).

В данной работе для матрицы A (в том числе и блочной)

$$A=\|a_{ij}\|;\ a_{ij}-a_{i-1,j-1}=\lambda^{(1)}_{i-1}\varkappa^{(1)}_{j-1}+\lambda^{(2)}_{i-1}\varkappa^{(2)}_{j-1},$$

где

$$\varkappa^{(1)}_j=a_{1,j+1}, \tag{1}$$

применением метода работы [2] получен алгоритм QR-факторизации (ортогонального разложения), обладающий в силу условия (1) меньшей сложностью. Именно в случае $(m\times n)$-матрицы $(m\geq n)$ полного ранга с $(l\times l)$ блоками общего вида сложность предлагаемого алгоритма равна $26mnl+32n^2l$, тогда как сложность соответствующего алгоритма [2] была равна $28mnl+67n^2l$.

В скалярном случае, при $m\simeq n$, экономия составляет около 40%. Отметим, что добавление условия $\lambda^{(1)}_i=a_{i+1,1}$ (как в [3]) в данном случае не приводит к существенному сокращению числа операций.

2° Пусть A—блочная матрица полного ранга, удовлетворяющая условию

$$A=\|a_{ij}\|;\ a_{ij}-a_{i-1,j-1}=\lambda^{(1)}_{i-1}\varkappa^{(1)}_{j-1}+\lambda^{(2)}_{i-1}\varkappa^{(2)}_{j-1};\ \varkappa^{(1)}_j=a_{1,j+1},$$

где a_{ij}; $\lambda^{(s)}_i$; $\varkappa^{(s)}_j$—$(l\times l)$-матрицы; $i=1, 2, \ldots, m$; $s=1, 2$; $j=1, 2, \ldots, n$.

Пусть, далее, E_l—$(l\times l)$-единичная матрица, 0—нулевая матрица, Z_0—квадратная матрица следующего вида:

$$Z_0=\begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & E_l \\ E_l & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & E_l & 0 \end{bmatrix}$$

Z_1 и $Z=Z_1+Z_0$ есть $(m+2(n-1))l\times(m+2(n-1))\,l$ матрицы, где

$$Z_1(n+i,\ n-1)=\lambda^{(1)}_i;\quad i=1, 2, \ldots, m-1,$$

$$Z_1(n+i,\ m+2(n-1))=\lambda^{(2)}_i;\ i=1, 2, \ldots, m-1.$$

Остальные элементы Z_1 равны нулю.

Далее, обозначим:

$$W=\mathrm{diag}[\overbrace{0, \ldots, 0}^{(n-1)l},\ \overbrace{1, \ldots, 1}^{ml},\ \overbrace{0, \ldots, 0}^{(n-1)l}];$$

$$\lambda^{(s)}=[\overbrace{0, \ldots, 0}^{(n-1)l},\ \lambda^{(s)T}_1,\ \lambda^{(s)T}_2, \ldots, \lambda^{(s)T}_{m-1},\ \overbrace{0, \ldots, 0}^{ln}]^T;\ s=1, 2;$$

$$t=[a^T_{1n},\ a^T_{1\,n-1}, \ldots, a^T_{11}, \ldots, a^T_{m1},\ \varkappa^{(2)T}_{n-1}, \ldots, \varkappa^{(2)T}_1]^T;$$

$$x^*Wy=[x,\ y].$$

3°. В приведенных обозначениях алгоритм решения задачи наименьших квадратов $Ax_0\simeq b_0$ выглядит следующим образом:

$:INITIALIZATIONS:$

$q_1=t;\ L=t;\ \hat{q}=q_1;$

$p_1=[E_l, 0, \ldots, 0]^T;\ \hat{p}=p_1;$

$f^{(s)}=0;\ \Phi^{(s)}=0;\ s=1, 2, \ldots, 5;$

$x=[q_1, q_1]^{-1};\ x_{r\mu}=[\lambda^{(r)}, \lambda^{(\mu)}];\ r, \mu=1, 2;$

$a=[q^T_{n1}, q^T_{n-1,1}, \ldots, q^T_{m+n-1,1}];$

$x_0=p_1xab_0$

$:MAIN\ LOOP:$

For $j=2$ *TO* n *DO*

BEGIN

$y=-[q_1, Zq_{j-1}];\ v_1=q_{n+m-1\,j-1};$

$v_2=-(q_{n-1,j-1}+x_{11}q_{n-1,j-1}+q_{2n+m-2,j-1}+[\lambda^{(1)}, q_{j-1}]);$

$v_3=(x_{22}q_{2n+m-2,j-1}+x_{21}q_{n-1,j-1}+[\lambda^{(2)}, q_{j-1}]);$

$v_4=-q_{n-1,j-1};$

$v_5=-q_{2n+m-2,j-1};$

$$q_j = Zq_{j-1} + \hat{q}xy + \sum_{s=1}^{5} f^{(s)}v_s;$$

$$\rho_j = Z_0\rho_{j-1} + \hat{\rho}xy + \sum_{s=1}^{5} \Phi^{(s)}v_s;$$

$a = [q^T_{n,j}, q^T_{n+1,j}, \ldots, q^T_{m+n-1,j}];$

$y = [q_j, q_j]^{-1}$

$x_0 = x_0 + \rho_j y a b_0;$

$p_j = Z^{-1}(q_j - t\rho_{1j});$

$v_1 = [p_j, \lambda^{(1)}];$

$v_2 = [p_j, \lambda^{(2)}];$

$f^{(1)} = f^{(1)} + q_j y p^*_{n+m-1,j};$

$f^{(2)} = f^{(2)} + q_j y p^*_{n-1,j};$

$f^{(3)} = f^{(3)} + q_j y p^*_{2n+m-2,j};$

$f^{(4)} = f^{(4)} + q_j y v_1;$

$f^{(5)} = f^{(5)} + q_j y v_2;$

$\Phi^{(1)} = \Phi^{(1)} + \rho_j y p^*_{n+m-1,j};$

$\Phi^{(2)} = \Phi^{(2)} + \rho_j y p^*_{n-1,j};$

$\Phi^{(3)} = \Phi^{(3)} + \rho_j y p^*_{2n+m-2,j};$

$\Phi^{(4)} = \Phi^{(4)} + \rho_j y v_1;$

$\Phi^{(5)} = \Phi^{(5)} + \rho_j y v_2;$

$L = ZL;\ \ s = -[L, \hat{q}];$

$\hat{q} = \hat{q} + q_j y s;$

$\hat{\rho} = \hat{\rho} + \rho_j y s;$

END.

4°. Результаты, изучаемые выше, нетрудно распространить на случай произвольного теплицевого ранга, т. е. когда

$$a_{ij} - a_{i-1\,j-1} = \sum_{s=1}^{k} \lambda^{(s)}_{i-1} x^{(s)}_{j-1}.$$

Отметим, что при $k=1$ алгоритм без условия (1) имеет сложность $19mnl + 27n^2l$, а данный алгоритм — сложность $17mnl + 17n^2l$. При $m \approx n$ имеем экономию 33%. Наибольший эффект получаем в подробно разобранном случае $k=2$. Отметим также, что приведенные алгоритмы дают возможность (см. ([5])) экономично решать интегральные уравнения второго рода

$$y(x) = \int_0^1 K(x, t)y(t)dt + f(x)$$

с „почти разностными“ гладкими ядрами, удовлетворяющими условию

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}\right)K(x, t)=\sum_{s=1}^{k}\lambda^{(s)}(x)\chi^{(s)}(t);\quad 0\leqslant x, t\leqslant 1$$

и условию (сравнить с (1))

$$\chi^{(1)}(t)=K(0, t).$$

Институт математики
Академии наук Армении

Գ. Վ. ԱՂԵԿՅԱՆ

Փոքր տեպլիցյան ռանգի մատրիցների համար ամենափոքր քառակուսիների խնդրի լուծման խնայողական ալգորիթմ

Աշխատանքում, փոքր տեպլիցյան ռանգի մատրիցների համար, այսինքն երբ

$$A=\|a_{ij}\|;\ a_{ij}-a_{i-1,j-1}=\sum_{s=1}^{k}\lambda_{i-1}^{(s)}\chi_{j-1}^{(s)};\ i=1, 2, \ldots, m;$$

$j=1, 2, \ldots n;\ k\ll\min(m, n)$.
մշակված է խնայողական ալգորիթմ $\chi_j^{(1)}=a_{1,j+1}$ *դեպքում։ Համեմատած* (²) *աշխատանքի ալգորիթմի հետ առաջարկվող ալգորիթմը տալիս է զգալի խնայողություն։ Առավելագույն խնայողություն ստացվում է* $k=2$ *դեպքում, որը քառակուսի մատրիցների համար կազմում է մոտավորապես 40%։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. В. Воеводин, Е. Е. Тыртышников,* в кн.: Вычислительные процессы и системы. Вып. 1, Наука, М., с. 124—267, 1983. [2] *Г. В. Агекян, А. Б. Нерсесян.* Блочно-ортогональное разложение матриц теплицева типа и быстрое решение некоторых интегральных уравнений. Депонировано в Арм. НИИНТИ № 64-Ар. 89. 1989. [3] *J. Bistritz, I. Kailath.* Linea Agebra and its applications, v. 98 p. 77—121 (1988)