ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Том 91 1990 №1

УДК 519.48

МАТЕМАТИКА

Ю. М. Мовсисян

$\forall\exists(\forall)$-тождества ассоциативности со специализированными кванторами

(Представлено академиком АН Армении Р. А. Амбарцумяном 14.V 1990)

Одним из первых результатов о $\forall\exists(\forall)$-тождествах является теорема Шауфлера ([1]) о $\forall\exists(\forall)$-тождествах ассоциативности (имеющая приложение в теории кодирования): *в алгебре $\langle Q; \Lambda_Q\rangle$ выполняется $\forall\exists(\forall)$-тождество ассоциативности*

$$\forall X, Y\exists X', Y'\forall x, y, z(X[Y(x, y), z]=X'[x, Y'(y, z)])$$

тогда и только тогда, когда мощность $|Q|\leqslant 3$ (здесь Λ_Q—множество всех квазигрупповых операций, определенных на Q). В ([2]) предложено другое доказательство этой теоремы. О $\forall\exists(\forall)$-тождествах (и сверхтождествах) см. ([3]) и цитированную там литературу.

Обобщение этого результата для тернарных и n-арных квазигрупповых операций содержится в ([4,5]) См. также ([7]).

Указанный результат Шауфлера допускает различные модификации. Сформулируем их в одном утверждении, называя его теоремой Шауфлера.

Теорема Шауфлера. *Для любого непустого множества Q следующие условия эквивалентны:*

i) для любых двух квазигрупп $Q(X)$ и $Q(Y)$ существуют квазигруппы $Q(X')$ и $Q(Y')$ с тождеством

$$X[x, Y(y, z)]=X'[Y'(x, y), z]; \tag{1}$$

ii) для любых двух квазигрупп $Q(X)$ и $Q(Y)$ существуют квазигруппы $Q(X')$ и $Q(Y')$ с тождеством

$$X[Y(x, y), z]=X'[x, Y'(y, z)]; \tag{2}$$

iii) для любых двух луп $Q(X)$ и $Q(Y)$ существуют квазигруппы $Q(X')$ и $Q(Y')$ с тождеством (1);

iv) для любых двух луп $Q(X)$ и $Q(Y)$ существуют квазигруппы $Q(X')$ и $Q(Y')$ с тождеством (2);

v) для любых двух луп $Q(X)$ и $Q(Y)$ существуют лупы $Q(X')$ и $Q(Y')$ с тождеством (1);

vi) для любых двух луп $Q(X)$ и $Q(Y)$ существуют лупы $Q(X')$ и $Q(Y')$ с тождеством (2);

vii) в алгебре $\langle Q; L_Q\rangle$ выполняется сверхтождество

$$X[x, Y(y, z)]=Y[X(x, y), z];$$

(L_Q — *множество всех луповых операций, определенных на* Q).

viii) в алгебре $\langle Q; L_Q\rangle$ *выполняется сверхтождество*

$$X[x, Y(y, z)] = X[Y(x, y), z];$$

ix) для любой квазигруппы $Q(X)$ *существуют квазигруппы* $Q(X')$ *и* $Q(Y')$ *с тождеством*

$$X[x, X(y, z)] = X'[Y'(x, y), z]; \tag{3}$$

x) для любой квазигруппы $Q(X)$ *существуют квазигруппы* $Q(X')$ *и* $Q(Y')$ *с тождеством*

$$X[X(x, y), z] = X'[x, Y'(y, z)]; \tag{4}$$

xi) мощность $|Q|\leqslant 3$.

По существу новыми (относительно утверждения Шауфлера ([1])) здесь являются импликации $ix)\Rightarrow xi)$, $x)\Rightarrow xi)$.

Сформулируем основной результат настоящей работы, в частности, охватывающий и теорему Шауфлера.

Теорема. *Для любого непустого множества* Q *следующие условия эквивалентны:*

j) для любых двух квазигрупп $Q(X)$ *и* $Q(Y)$ *существуют группоиды* $Q(X')$ *и* $Q(Y')$ *с тождеством* (1);

jj) для людых двух квазигрупп $Q(X)$ *и* $Q(Y)$ *существуют группоиды* $Q(X')$ *и* $Q(Y')$ *с тождеством* (2);

jjj) для любых двух луп $Q(X)$ *и* $Q(Y)$ *существуют группоиды* $Q(X')$ *и* $Q(Y')$ *с тождеством* (1);

jv) для любых двух луп $Q(X)$ *и* $Q(Y)$ *существуют группоиды* $Q(X')$ *и* $Q(Y')$ *с тождеством* (2);

v) для любой квазигруппы $Q(X)$ *существуют группоиды* $Q(X')$ *и* $Q(Y')$ *с тождеством* (3);

vj) для любой квазигруппы $Q(X)$ *существуют группоиды* $Q(X')$ *и* $Q(Y')$ *с тождеством* (4);

vjj) множество Q *бесконечно или* $|Q|\leqslant 3$.

Следствие 1. *Для любого непустого множества* Q *следующие условия эквивалентны:*

а) для любой лупы $Q(X)$ *существуют группоиды* $Q(X')$ *и* $Q(Y')$ *с тождеством* (3);

б) для любой лупы $Q(X)$ *существуют группоиды* $Q(X')$ *и* $Q(Y')$ *с тождеством* (4);

в) множество Q *бесконечно или* $|Q|\leqslant 4$.

Следствие 2. *Для любого непустого и неодноэлементного множества* Q *следующие условия эквивалентны:*

г) для любых группоидов $Q(X)$ *и* $Q(Y)$ *существуют группоиды* $Q(X')$ *и* $Q(Y')$ *с тождеством* (1)*;

д) для любых группоидов $Q(X)$ *и* $Q(Y)$ *существуют группоиды* $Q(X')$*и и* $Q(Y')$ *с тождеством* (2);

е) для любого группоида $Q(X)$ *существуют группоиды* $Q(X')$ *и* $Q(Y')$ *с тождеством* (3);

---

* Ср. с теоремой 2.2 ([8]), которая ошибочна для бесконечных множеств.

ж) *для любого группоида* $Q(X)$ *существуют группоиды* $Q(X')$ *и* $Q(Y')$ *с тождеством* (4);

з) *множество* Q *бесконечно.*

Следствие 3. *Для неассоциативной лупы* $Q(\circ)$ *следующие условия эквивалентны:*

и) *множество* Q *бесконечно;*

к) *функциональное уравнение*

$$x\circ(y\circ z)=A[B(x,y),z]$$

имеет решение в множестве Q;

л) *функциональное уравнение*

$$(x\circ y)\circ z=A[x,B(y,z)]$$

имеет решение в множестве Q;

Следствие 4. *Для неизотопных луп* $Q(\cdot)$ *и* $Q(\circ)$ *следующие условия эквивалентны:*

м) *множество* Q *бесконечно;*

н) *функциональное уравнение*

$$x\cdot(y\circ z)=A[B(x,y),z]$$

имеет решение в множестве Q.

о) функциональное уравнение

$$(x\cdot y)\circ z=A[x,B(y,z)]$$

имеет решение в множестве Q.

Следствие 5. *Для неизоморфных групп* $Q(\cdot)$ *и* $Q(\circ)$ *следующие условия эквивалентны:*

п) *множество* Q *бесконечно;*

р) *функциональное уравнение*

$$x\cdot(y\circ z)=A[B(x,y),z]$$

имеет решение в множестве Q;

с) *функциональное уравнение*

$$(x\cdot y)\circ z=A[x,B(y,z)]$$

имеет решение в множестве Q.

Следствие 6. *Для любого непустого множества* Q *любое из условий* $j)-vjj)$ *эквивалентно дизъюнкции* $\Phi_1\vee\Phi_2$, *где* Φ_1*—любое из условий* $i)-xi)$, *а* Φ_2*—любое из условий* г)—з).

Ереванский государственный университет

ՅՈՒ. Մ. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Մասնագիտացված էլեմենտներով զուգորդական $\forall\exists(\forall)$—նույնություններ

Աշխատանքում նկարագրվում են այն Q *բազմությունները (հզորությունները), որոնց վրա որոշված ցանկացած* $Q(X)$ *և* $Q(Y)$ *քվազիխմբերի (լուպաների) համար գոյություն ունեն այնպիսի* $Q(X')$ *և* $Q(Y')$ *խմբակերպեր, որ տեղի ունի զուգորդականության*

$$X[x, Y(y, z)] = X'[Y'(x, y), z]$$

Նույնությունը։

ЛИТАРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *R. Schauffler*, Math. Zeitschr, v. 67, No. 5, p. 428—435 (1957). [2] *В. Д. Белоусов*, УМН, т. 20, № 1, с. 75—146 (1965). [3] *Ю. М. Мовсисян*, Сверхтождества и сверхмногообразия в алгебрах. Ереван, Изд-во ЕГУ, 1990. [4] *Я. Ушан* Math. Balkanica, v. 1, p. 273—281 (1971). [5] *Я. Ушан, М. Жижович*, Publ. Inst. Math. (Beograd), v. 19, p. 167—172 (1975). [6] *A. Krapež* Publ. Inst. Math. (Beograd), v. 28, p. 105—112 (1980). [7] *J. Dénes, A. D. Keedwell*, Latin squares and their applications. Academiai Kiado, Budapest, 1974.