

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

А. С. Асратян, О. А. Амбарцумян, Г. В. Саркисян

Некоторые локальные условия гамильтоновости и панцикличности графа

(Представлено чл.-корр. АН Армении Ю. Г. Шукурханом 11/V 1990)

Рассматриваются конечные графы без петель и кратных ребер. Все понятия, не определяемые в работе, можно найти в ⁽¹⁾.

Для графа $G=(V, E)$ введем обозначения: $d(x)$ —степень вершины x , $d(x, y)$ —расстояние между вершинами x, y , $N(x)=\{y \in V / (x, y) \in E\}$, $M^3(x)=\{y \in V / d(x, y) \leq 3\}$. Простой цикл длины k обозначается через C_k , а множество вершин цикла C_k —через $V(C_k)$. Гамильтоновым циклом (гамильтоновой цепью) графа G называется простой цикл (простая цепь), содержащая все вершины G . Граф, имеющий гамильтонов цикл, называется гамильтоновым. Граф $G=(V, E)$ с $|V| \geq 3$ называется панциклическим, если G содержит C_k для каждого k , $3 \leq k \leq |V|$. Граф $G=(V, E)$ называется локально связным, если для каждого $x \in V$ подграф, порожденный множеством $N(x)$, связан.

В работах ⁽²⁻⁴⁾ получены следующие условия гамильтоновости графа.

Теорема 1 ^(2,3). Пусть в связном графе G $d(x)+d(y) \geq |N(x) \cup N(y) \cup N(z)|$ для каждой тройки вершин x, y, z , где $d(x, y)$ и $z \in N(x) \cap N(y)$. Тогда граф G гамильтонов.

Теорема 2 ^(2,3). Двусвязный граф $G=(V, E)$ с $|V| \geq 3$ гамильтонов, если для каждой пары вершин x, y с $d(x, y)=2$ из условия $d(x) < |V|/2$ следует, что $d(y) \geq |M^3(x)|/2$.

Теорема 3 ⁽⁴⁾. Если связный, локально связный граф $G=(V, E)$ с $|V| \geq 3$ не содержит порожденного подграфа, изоморфного $K_{1,3}$, то G гамильтонов.

В настоящей работе получены некоторые вариации теоремы 1 и 2, а также результаты, раскрывающие структуру графов, удовлетворяющих условиям теорем 1 и 3.

Утверждение. Если n -вершинный двудольный граф G удовлетворяет условиям теоремы 1, то n четно и $G=K_{n/2, n/2}$.

Теорема 4. Если недвудольный граф G удовлетворяет условиям теоремы 1, то он панциклический. Более того, для каждого цикла C_k графа G , $3 \leq k < |V|$, в G существуют или такой цикл C_{k+1} , что $V(C_k) \subset V(C_{k+1})$, или такой цикл C_{k+2} , что $V(C_k) \subset V(C_{k+2})$.

Следствие ⁽⁵⁾. Пусть в n -вершинном графе G $d(x)+d(x) \geq n$

для каждой пары несмежных вершин x, y . Тогда либо G панциклический, либо n четно и $G = K_{n/2, n/2}$.

Теорема 5. Если недвудольный граф G удовлетворяет условиям теоремы 1, то любые две вершины x, y с $d(x, y) > 2$ соединены гамильтоновой цепью.

Теорема 6. Пусть в связном графе G $d(x) + d(y) \geq |N(x) \cup N(y) \cup N(y) \cup N(z)| + 1$ для каждой тройки вершин x, y, z , где $d(x, y) = 2$ и $z \in N(x) \cap N(y)$. Тогда любые две вершины в G соединены гамильтоновой цепью.

Теорема 7. Пусть в связном графе G $d(x) + d(y) \geq |N(x) \cup N(y) \cup N(z)| - 1$, $|N(x) \cap N(y)| \geq 2$ для каждой тройки вершин x, y, z , где $d(x, y) = 2$, $z \in N(x) \cap N(y)$. Тогда G имеет гамильтонову цепь.

Теорема 8. Пусть $G = (V, E)$ двусвязный граф и для каждой пары вершин x, y с $d(x, y) < |V|/2$ следует, что $d(y) \geq (|M^2(x)| - 1)/2$. Тогда либо G гамильтонов, либо $|V| = 2n + 1$ и V можно разбить на подмножества V_1 и V_2 , $|V_1| = n + 1$, $|V_2| = n$, так что $(x, y) \in E$ для каждой пары вершин $x \in V_1$, $y \in V_2$ и $(x, y) \in E$ для каждой пары вершин $x, y \in V_1$.

Теорема 9. Если связный, локально связный граф $G = (V, E)$ с $|V| \geq 3$ не содержит порожденного подграфа, изоморфного $K_{1,3}$, то G панциклический. Более того, для каждого цикла C_k графа G , $3 \leq k < |V|$, в G существует такой цикл C_{k+1} , что $V(C_k) \subset V(C_{k+1})$.

Доказательство. Ясно, что в G существует цикл длины три. Предположим, в G существует цикл длины $k \geq 3$, и покажем, что для каждого цикла C_k , $3 \leq k < |V|$, в G существует такой цикл C_{k+1} , что $V(C_k) \subset V(C_{k+1})$. Пусть $C_k = (v_1, v_2, \dots, v_k, v_1)$. Поскольку $k < |V|$, то множество $Q = \bigcup_{i=1}^k N(v_i) \setminus V(C_k)$ не пусто. Если в Q существует вершина, смежная с двумя последовательными вершинами в C_k , то требуемый цикл C_{k+1} существует. Поэтому в дальнейшем мы полагаем, что выполнено следующее

Свойство 1. $N(v_i) \cap N(v_{i+1}) \cap Q = \emptyset$ для каждого i , $1 \leq i \leq k$. (Здесь и далее сложение и вычитание производится по модулю k).

Пусть $u \in Q$ и $N(u) \cap V(C_k) = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_r}\}$. Поскольку G не содержит порожденного подграфа, изоморфного $K_{1,3}$, то имеет место

Свойство 2. $(v_{i_j-1}, v_{i_{j+1}}) \in E$ для каждого j , $1 \leq j < r$.

Пусть $P = (u_1, \dots, u_r)$ -кратчайшая цепь, соединяющая вершины u , v_{i_1+1} в подграфе, порожденном множеством $N(v_{i_1})$, причем $u_1 = v_{i_1+1}$, $u_r = u$. (Из условия теоремы следует, что такая цепь существует и $r \leq 4$). Из свойства 2 следует, что $r \geq 3$ и $u_{r-1} \in C_k$. Пусть $u_2 = v_{i_2}$. Возможны следующие случаи:

а) $r = 3$. Из свойства 1 имеем, что $(u, v_{i_1-1}), (u, v_{i_1+1}) \in E$, а из свойства 2 имеем, что $(v_{i_1-1}, v_{i_2+1}) \in E$. Но тогда, удалив из C_k ребра $(v_{i_1-1}, v_{i_1}), (v_{i_1}, v_{i_2+1}), (v_{i_1}, v_{i_1+1})$ и добавив ребра $(v_{i_1+1}, v_{i_2}), (v_{i_2}, u), (v_{i_1-1}, v_{i_2+1}), (v_{i_1}, u)$, мы получим требуемый цикл C_{k+1} .

б) $r = 4$. Если $u_3 \in C_k$, то существование требуемого C_{k+1} можно показать, как в предыдущем случае, беря в качестве u вершину u_3 .

Поэтому предположим, что $u_j \in C_k$ и $u_j = v_{i_k}$. Без ограничения общности достаточно рассмотреть случаи, когда $1 + i_1 < i_2 < i_3$ или $1 + i_1 < i_2 < i_3$. Поскольку $(v_{i_1}, v_{i_2-1}), (v_{i_1}, v_{i_2+1}), (v_{i_2}, v_{i_1}) \in E$ и G не содержит порожденного подграфа, изоморфного $K_{1,3}$, то

$$E \cap \{(v_{i_1}, v_{i_2-1}), (v_{i_1}, v_{i_2+1}), (v_{i_2-1}, v_{i_2+1})\} \neq \emptyset.$$

Рассмотрим возможные подслучаи и в каждом из них укажем требуемый цикл C_{k+1} .

1. $(v_{i_1}, v_{i_2-1}) \in E$ и $1 + i_1 < i_2 < i_3$. Тогда

$$C_{k+1} = (v_1, \dots, v_{i_1-1}, v_{i_1+1}, v_{i_1+2}, \dots, v_{i_2-1}, v_{i_1}, u, v_{i_2}, v_{i_2+1}, \dots, v_{i_3-1}, v_{i_1+1}, \dots, v_k, v_1).$$

2. $(v_{i_1}, v_{i_2-1}) \in E$ и $1 + i_1 < i_2 < i_2$. Тогда

$$C_{k+1} = (v_1, \dots, v_{i_1-1}, v_{i_1+1}, v_{i_2+1}, \dots, v_{i_2-1}, v_{i_1+1}, \dots, v_{i_3-1}, v_{i_1}, u, v_{i_2}, v_{i_2+1}, \dots, v_k, v_1)$$

3. $(v_{i_1}, v_{i_2+1}) \in E$ и $1 + i_1 < i_2 < i_3$. Тогда

$$C_{k+1} = (v_1, \dots, v_{i_1-1}, v_{i_1+1}, v_{i_2+1}, \dots, v_{i_2}, v_{i_1}, u, v_{i_2}, v_{i_2+1}, \dots, v_{i_3-1}, v_{i_1+1}, \dots, v_k, v_1).$$

4. $(v_{i_1}, v_{i_2+1}) \in E$ и $1 + i_1 < i_2 < i_2$. Тогда

$$C_{k+1} = (v_1, \dots, v_{i_1-1}, v_{i_1+1}, v_{i_2+1}, \dots, v_{i_2-1}, v_{i_1+1}, \dots, v_{i_3}, v_{i_1}, u, v_{i_2}, v_{i_2+1}, \dots, v_k, v_1).$$

5. $(v_{i_2-1}, v_{i_2+1}) \in E$ и $1 + i_1 < i_2 < i_3$. Тогда

$$C_{k+1} = (v_1, \dots, v_{i_1}, u, v_{i_2}, v_{i_2}, v_{i_1+1}, v_{i_2+1}, \dots, v_{i_3-1}, v_{i_2+1}, v_{i_2+2}, \dots, v_{i_3-1}, v_{i_2+1}, \dots, v_k, v_1).$$

6. $(v_{i_2-1}, v_{i_2+1}) \in E$ и $1 + i_1 < i_2 < i_2$. Тогда

$$C_{k+1} = (v_1, \dots, v_{i_2}, u, v_{i_2}, v_{i_2}, v_{i_1+1}, v_{i_2+1}, \dots, v_{i_3-1}, v_{i_2+1}, \dots, v_{i_3-1}, v_{i_2+1}, \dots, v_k, v_1).$$

Ереванский государственный университет

Ա. Ս. ՀԱՍՐԱՔՅԱՆ, Հ. Ա. ՀԱՍՐԱՐԶՈՒՄՅԱՆ, Դ. Վ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Գրաֆի համիլտոնության և պանցիկլիկության որոշ լոկալ պայմաններ

$G = (V, E)$ գրաֆի համար մտցնենք հետևյալ նշանակումները՝ $d(x) = x$ գաղաթի աստիճան, $d(x, y) = x$ և y գաղաթների հեռավորությունը G -ում, $N(x) = \{y \in V / (x, y) \in E\}$:

Ներկա աշխատանքի հիմնական արդյունքը հետևյալն է.

Խ հոդված. Ինքուր G -ն n -գաղաթանի կապակցված գրաֆ է, $n \geq 3$, որտեղ $d(x) + d(y) \geq |N(x) \cup N(y) \cup N(z)|$ կամայական երեք x, y, z գա-

զարմերի համար, որոնք բաժանարարում են $d(x, y) = 2$ և $z \in N(x) \cap N(y)$ պայմանին: Այդ դեպքում կամ n թիվը գույգ է և $G = K_{n/2, n/2}$, կամ G -ն պարունակում է t երկարությամբ պարզ ցիկլ յուրաքանչյուր t -ի համար, $3 \leq t \leq n$:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Ф. Харари, Теория графов. Мир, М., 1973. ² А. С. Асратян, Н. К. Хачатрян, в кн. «Проблемы теоретической кибернетики» (тезисы докладов 8-ой Всесоюзной конференции). Горький, с. 28, 1988. ³ А. С. Hasratian, N. K. Khachatryan, J. Comb. Theory, serie B, v. 49 №2, p. 287–294 (1990). ⁴ D. J. Oberly, D. P. Sumner, J. Graph Theory, v. 3 p. 351–356 (1979). ⁵ J. A. Bondy, J. Combin. Theory, v. 11, p. 80–84 (1971).