ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 91 1990 №1

УДК 517.956.223

МАТЕМАТИКА

А. О. Бабаян

Об одной граничной задаче для уравнения Бицадзе

(Представлено чл.-корр. АН Армении А. Б. Нерсесяном 7/V 1990)

Пусть D—односвязная область комплексной плоскости, ограниченная простым замкнутым контуром $\Gamma\in A^{(1,\alpha)}$ (т. е. $\theta(s)$—угол наклона касательной к вещественной оси как функция s—длины дуги принадлежит классу $C^{(1,\alpha)}$). Будем предполагать, что $0<\alpha<1$. В работе рассматривается дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2}=0, \qquad z\in D \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$\mathrm{Re}\, u|_\Gamma=f(t), \quad t\in\Gamma, \tag{2}$$

$$\mathrm{Re}\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma=g(t), \qquad t\in\Gamma. \tag{3}$$

Здесь n—внешняя нормаль к Γ, f и g—действительные функции на Γ, принадлежащие соответственно $C^{(1,\alpha)}(\Gamma)$ и $C^{(\alpha)}(\Gamma)$. ($C^{(\alpha)}(\Gamma)$- класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем α, на Γ; $C^{(1,\alpha)}(\Gamma)$ -класс функций, производная которых принадлежит $C^{(\alpha)}(\Gamma)$). Ищется функция $u(z,\bar{z})\in C^{(1,\alpha)}(\bar{D})$—решение (1) в области D и на $\Gamma=\partial D$ удовлетворяющая краевым условиям (2), (3). В случае бесконечно гладких f и g задача (1)–(3) рассматривалась в ([1]).

Пусть $\omega(z)$—функция, аналитическая в единичном круге $B_1=\{z\in C:|z|<1\}$, однолистно отображающая B_1 на D. Обратную функцию будем в дальнейшем обозначать $\chi(z)$. Тогда основной результат, полученный в этой работе, следующий:

Теорема. *Уравнение* (1) *с граничными условиями* (2), (3) *в* $C^{(1,\alpha)}(\bar{D})$ *эквивалентно краевой задаче для аналитических функций*

$$\mathrm{Re}[\varphi(t)+\bar{t}\chi(t)\psi(t)+C\bar{t}]=f(t), \tag{4}$$

$$\mathrm{Re}\left[\frac{2\varphi(t)}{\chi'(t)}+\frac{\chi(t)\Phi(t)}{\chi'(t)}\right]-\frac{\mathrm{Im}(K\psi)(t)}{\pi}=\frac{g(t)}{|\chi'(t)|} \tag{5}$$

при $t\in\Gamma$ *в классе* $C^{(\alpha)}(\bar{D})$. *Здесь* f, g—*функции из* (2) *и* (3), φ *и* ψ—*неизвестные функции из* $C^{(\alpha)}(\bar{D})$, *аналитические в* D, C—*неизвестная комплексная постоянная*, K—*вполне непрерывный оператор в* $C^{(\alpha)}(\bar{D})$, *действующий по формуле*

$$(K\psi)(t)=\chi(t)\int\limits_{\Gamma}\frac{\bar{\xi}-\bar{t}+(\overline{\chi^2(t)/\chi'(t)})(\chi(\xi)-\chi(t))}{(\chi(\xi)-\chi(t))^2}\chi'(\xi)\chi(\xi)\psi(\xi)d\xi. \qquad (6)$$

Функция $\Phi(t)$ — *внутренние граничные значения функции*

$$\Phi(z)=\frac{\chi'(z)}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\chi'(\xi)f(\xi)d\xi}{(\chi(\xi)-\chi(t))^2},\quad z\in D. \qquad (7)$$

Решение задачи (1)—(3), $u\in C^{(1,\alpha)}(D)$, *и решение* φ, ψ, C *системы* (4)—(5) *связаны соотношением*

$$u(z,\bar{z})=\varphi(z)+\bar{z}\chi(z)\psi(z)+C\bar{z}. \qquad (8)$$

Уравнение (5) *разрешимо в* $C^{(\alpha)}(\bar{D})$ *при любой правой части* $g\in C^{(\alpha)}(\Gamma)$. *Однородное уравнение имеет одно линейно независимое решение*

$$\psi^*(t)=i(t-p)(\chi(t))^{-1} \qquad (9)$$

(p — *такая точка из* D, *что* $\chi(p)=0$). Линейная независимость понимается в смысле действительных коэффициентов в определении линейной независимости системы аналитических функций. Для доказательства теоремы необходимы следующие вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Если* $\Gamma=\partial D\in A^{(1,\alpha)}$, *тогда* $\omega(z)$ — *аналитическая функция, однолистно отображающая* B_1 *на* D, *принадлежит классу* $C^{(2,\alpha)}(\bar{B}_1)$.

Лемма 2. *Пусть* φ, ψ *функции класса* $C^{(\alpha)}(\bar{D})$, *аналитические в* D, *удовлетворяют граничному условию*

$$\mathrm{Re}(\varphi(t)+\bar{t}\psi(t))=f(t),\quad t\in\Gamma, \qquad (10)$$

где $f\in C^{(1,\alpha)}(\Gamma)$. *Тогда функция*

$$d(z)=\varphi'(z)+\bar{z}\psi'(z) \qquad (11)$$

принадлежит $C^{(\alpha)}(\bar{D})$ *и граничные значения* $d(z)$ *определяются по формуле*

$$d(t)=\frac{\chi'(t)}{\overline{\chi'(t)}}\overline{\chi^2(t)}\psi(t)-\frac{\chi'(t)}{\pi\chi(t)}\mathrm{Im}(K^0\psi)(t)+\Phi(t). \qquad (12)$$

Здесь K^0 — *вполне непрерывный оператор в* $C^{(\alpha)}(\bar{D})$, *определяемый по формуле*

$$(K^0\psi)(t)=\chi(t)\int\limits_{\Gamma}\frac{\bar{\xi}-\bar{t}+(\overline{\chi^2(t)/\chi'(t)})(\chi(\xi)-\chi(t))}{(\chi(\xi)-\chi(t))^2}\chi'(\xi)\psi(\xi)d\xi, \qquad (13)$$

$\Phi(t)$ — *внутренние граничные значения функции* (7).

Доказательство теоремы. Общее решение уравнения (1)

$$u(z,\bar{z})=\varphi(z)+\bar{z}\psi(z), \qquad (14)$$

где φ, ψ — функции, аналитические в D (см. ([2])). Это решение ищется в классе $C^{(1,\alpha)}(\bar{D})$, следовательно $\psi(z)=u_{\bar{z}}(z,\bar{z})$ и $\varphi(z)=u-\bar{z}u_{\bar{z}}$ должны принадлежать по крайней мере классу $C^{(\alpha)}(\bar{D})$. Далее, функцию ψ можно представить в виде

$$\psi(z)=\chi(z)[(\psi(z)-\psi(p))/\chi(z)]+\psi(p).$$

Так как $\chi(z)$ обращается в нуль только в точке p и $\chi'(p)\neq 0$, функция $((\psi(z)-\psi(p))/\chi(z))$ аналитична в D. Кроме того эта функция принадлежит $C^{(\alpha)}(\bar{D})$, если $\psi\in C^{(\alpha)}(\bar{D})$. Следовательно, произвольное решение (1) из пространства $C^{(1,\alpha)}(\bar{D})$ можно представить в в виде (8), где φ и ψ принадлежат $C^{(\alpha)}(\bar{D})$. Краевое условие (2) примет вид (4).

Представим теперь условие (4) в следующей форме:

$$\mathrm{Re}(\varphi+\bar{t}\psi_1)=f_1(t),\quad t\in\Gamma,$$

где $\psi_1(t)=\psi(t)\chi(t)$, $f_1(t)=f(t)-\mathrm{Re}Ct$, и применим лемму 2. Получим, что функция $\varphi'(z)+\bar{z}\psi_1'(z)\in C^{(\alpha)}(\bar{D})$ и внутренние граничные значения этой функции определяются по формуле

$$(\varphi'(z)+\bar{z}\psi_1'(z))_\Gamma^+=\frac{\chi'(t)}{\overline{\chi'(t)}}\overline{\chi^2(t)}\psi_1(t)-\frac{\chi'(t)}{\pi\chi(t)}\mathrm{Im}(K_0\psi_1)(t)+\Phi_1(t).$$

Здесь $\Phi_1(t)$—граничное значение функции

$$\Phi_1(z)=\frac{\chi'(z)}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\chi'(\xi)(f(\xi)-\mathrm{Re}C\bar{\xi})}{(\chi(\xi)-\chi(t))^2}\,d\xi.$$

Учитывая, что $\psi_1(z)=\chi(z)\psi(z)$ и $\Phi_1(z)=\Phi(z)-\bar{C}$ ($\Phi(z)$—функция (7)), а также что $K_0(\chi\psi)=K\psi$ (K определяется из (6)), получим

$$(\varphi'(z)+\bar{z}(\chi(z)\psi(z))')_\Gamma^+=\frac{\chi'(t)}{\overline{\chi'(t)}}\overline{\chi(t)}\psi(t)-\frac{\chi'(t)}{\pi\chi(t)}\mathrm{Im}(K\psi)(t)+\Phi(t)-\bar{C}.\qquad(15)$$

Теперь мы можем написать граничное условие (3) (функция имеет вид (8))

$$\mathrm{Re}\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma=\mathrm{Re}\left[(\varphi'(z)+\bar{z}(\chi(z)\psi(z))')_\Gamma^+\frac{dt}{dn}+\frac{d\bar{t}}{dn}(\psi(t)\chi(t)+C)\right]=g(t)\qquad(16)$$

Вычислим $\frac{dt}{dn}$ и $\frac{d\bar{t}}{dn}$ при $t\in\Gamma$. Параметрическое представление границы Γ—$t=\omega(e^{i\theta})$ при $0\leqslant\theta<2\pi$, следовательно,

$$\frac{dt}{dn}=\frac{\chi(t)|\chi'(t)|}{\chi'(t)}\quad\text{и}\quad\frac{d\bar{t}}{dn}=\frac{\overline{\chi(t)}|\chi'(t)|}{\overline{\chi'(t)}}\qquad(17)$$

Подставляя (17) и (15) в (16), получим равенство (5). Итак, первая часть теоремы доказана.

Перейдем к изучению уравнения (5). Прежде всего, так как $\chi'(t)\neq 0$ при $|t|\leqslant 1$ и аналитична в B_1, индекс задачи

$$\mathrm{Re}[2(\chi'(t))^{-1}\psi(t)]=r(t),\quad t\in\Gamma$$

равен единице (см. ([3])). Оператор K—вполне непрерывный в $C^{(\alpha)}(\Gamma)$, следовательно, оператор R, действующий по формуле

$$(R\psi)(t)=\mathrm{Re}\left[2\left(\overline{\chi'(t)}\right)^{-1}\psi(t)\right]-\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}(K\psi)(t),$$

также имеет индекс, равный единице ([4]). Непосредственно проверяется, что функция (9) — решение однородного уравнения

$$\mathrm{Re}\left[2\left(\overline{\chi'(t)}\right)^{-1}\psi(t)\right]-\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}(K\psi)(t)=0.$$

Других линейно независимых решений это уравнение иметь не может, так как однородная задача (1)–(3) имеет только четыре линейно независимых решения ([5]). Учитывая, что индекс этой задачи равен единице, можем заключить, что уравнение

$$\mathrm{Re}\left[2\left(\overline{\chi'(t)}\right)^{-1}\psi(t)\right]-\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}(K\psi)(t)=r(t),\quad t\in\Gamma$$

разрешимо в $C^{(\alpha)}(\Gamma)$ для любой действительной функции $r\in C^{(\alpha)}(\Gamma)$. Теорема доказана.

Автор благодарит Н. Е. Товмасяна за постановку задачи и постоянное внимание в процессе ее решения.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Ա. Հ. ԲԱԲԱՅԱՆ

Մի եզրային խնդրի մասին Բիցաձեի հավասարման համար

Այս աշխատությունում Բիցաձեի հավասարման եզրային պայմաններով՝

$$\mathrm{Re}\,u|_\Gamma=f(t),\quad \mathrm{Re}\,\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_\Gamma=g(t),\quad t\in\Gamma=\partial D$$

քննարկվում է $C^{(1,\alpha)}(\overline{D})$ տարածությունում (D միակապ տիրույթն է, Γ պատկանում է $A^{(1,\alpha)}$ դասին)։

Այս հավասարումը բերվում է եզրային խնդրին անալիտիկ ֆունկցիաների համար $C^{(\alpha)}(D)$ դասում։ Ապացուցվում է, որ այս խնդիրը լուծելի է $C^{(\alpha)}(D)$ դասում, համարժեք է սկզբնական խնդրին և համասեռ խնդիրը ունի մեկ գծորեն անկախ լուծում։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. А. Закарян*, Задача Римана для неправильно-эллиптического уравнения n-ого порядка в круге. Арм. НИИНТИ, № 83, Ар-88, Деп. 1988. [2] *А. В. Бицадзе*, Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, Наука, М., 1966. [3] *А. В. Бицадзе*, Основы теории аналитических функций комплексного переменного, Наука, М., 1984. [4] *З. Прёсдорф*, Некоторые классы сингулярных уравнений, Мир, М., 1979. [5] *И. Н. Векуа*, Новые методы решения эллиптических уравнений, Гостехиздат, М., 1948.