УДК 517.55

МАТЕМАТИКА

М. В. Казарян

О голоморфном продолжении функции
 с алгебраическими особенностями

(Представлено академиком АН Армении С. Н. Мергеляном 3/V 1990)

1. Пусть функция $f=f(z, w)$ голоморфна в окрестности множества $D \times \{0\}$ в $C^n \times C_w$ и при каждом фиксированном a из некоторого неплюриполярного множества $E \subset D$ функция $f(a, w)$ переменного w продолжается до функции, голоморфной на всей плоскости C_w за исключением некоторого множества особенностей $S(a)$. В зависимости от качественных и количественных характеристик множеств $S(a)$, $a \in E$, иногда удается сделать вывод о глобальном голоморфном продолжении функции f в $D \times C_w$, за исключением множества особенностей S , обладающего аналогичными свойствами. Хорошо известно несколько важных частных случаев:

1) Если для всех $a \in E$ множество $S(a)$ пустое, то f голоморфно продолжается в $D \times C_w$, т. е. тогда и S — пустое множество (этот результат принадлежит Сичаку ⁽¹⁾ и обобщает известную лемму Гартогса о голоморфном продолжении по одному переменному, когда предполагается голоморфность функции $f(a, w)$ во всей плоскости C_w , но не для всех $z \in D$).

2) Если $S(a)$ дискретное множество для всех $a \in E$, то S — аналитическое множество, возможно, пустое (см. ^(2,3)).

В частности,

3) если $S(a)$ состоит из единственной особой точки для всех $a \in E$, то аналитическое множество $S = \{(z, w) : w \cdot \varphi(z) = 1\}$ (возможно, $S = \emptyset$, если все особенности устранимы), где φ — голоморфная функция в области D (см. ⁽⁴⁾).

В случае многомерных сечений известно, что если функция $f = f(z, w)$ голоморфна в области $D \times G \subset C^n \times C_w$, $n \geq 1$, $m \geq 1$, и для всех $a \in E$ множество $S(a)$ плюриполярно, то S — плюриполярное множество, возможно, пустое (см. ⁽⁵⁾). Отметим также, что в последнем случае, если для всех $a \in E$ функция $f(a, w)$ продолжается в C_w^m до мероморфной функции, то f мероморфно продолжается в $D \times C_w^m$ (см. ⁽⁶⁾).

В настоящей работе рассматривается случай, когда $D = C^n$, $S(a)$ — конечные множества точек и при некоторых дополнительных условиях доказывается алгебраичность множества особенностей S .

Справедлива следующая

Теорема. Пусть Ω — область в $C^{n+1} = C^n \times C_w$, содержащая множество вида $\{(z, w) : |w| < \varepsilon(1 + |z|)^{-s}\}$, где $\varepsilon > 0$ и $s \geq 0$ некоторые константы и E неплюриполярное подмножество C^n . Пусть функ-

ция $f = f(z, w)$ голоморфна в Ω и при каждом фиксированном $a \in E$ функция $f(a, w)$ переменного w голоморфно продолжается в $C_w \setminus S(a)$, где $S(a)$ содержит не более чем m точек.

Тогда либо f продолжается до целой функции в C^{n+1} , либо она голоморфно продолжается в область $C^{n+1} \setminus S$, где $S = \{(z, w) : P_m(z)w^m + \dots + P_1(z)w = 1\}$ — алгебраическое множество и P_k — многочлен степени не выше $s \cdot k$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Заметим, что условие на асимптотику области Ω в бесконечности существенно. Без этого условия, т. е. только при $\Omega \supset \{w = 0\}$, утверждение об алгебраичности особенностей f неверно (в этом легко убедиться на простом примере: $f(z, w) = 1/(w - e^z)$).

Следует также обратить внимание, что в условиях теоремы речь идет об особенностях функции $f(a, w)$, $a \in E$, лишь на конечной плоскости C_w , т. е. допускается особенность также в бесконечно удаленной точке. Не нарушая общности, предположим, что хотя бы для одной точки $a \in E$ функция $f(a, w)$ имеет ровно m неустранимых конечных особенностей (иначе в утверждении теоремы вместо m можно брать число $< m$, либо f продолжается до целой функции в C^{n+1} , если все особенности устранимы). При $m = 0$ получаем ситуацию п. 1).

Из принципа непрерывности легко следует следующая теорема о „заразительности“ продолжения голоморфной функции через аналитическое множество (геометрический вариант) этой теоремы содержится в книге (2), с. 179, где вместо функции рассматривается ее график). Пусть A аналитическое множество в области $D \subset C^n$, U — открытое подмножество в D , пересекающее все неприводимые компоненты множества A и функция f голоморфна в $(D \setminus A) \cup U$. Тогда f голоморфно продолжается в область D .

2. Из теоремы 1 (2) (см. также следствие 1 (3)) легко следует, что f голоморфно продолжается в $C^{n+1} \setminus S$, где S — чисто n -мерное аналитическое множество в C^{n+1} . Не нарушая общности, можно считать, что $\Omega \cap S = \emptyset$. Действительно, пусть некоторая неприводимая компонента S' множества S пересекается с Ω . Тогда из голоморфности f в $\Omega \setminus S'$ с помощью теоремы о заразительности продолжения получим, что f голоморфно продолжается во все точки множества $S' \setminus S''$, где S'' — объединение остальных неприводимых компонент S . Следовательно, f голоморфно продолжается в $C^{n+1} \setminus S_0$, где S_0 — объединение неприводимых компонент S , которые не пересекают Ω . Таким образом, в дальнейшем мы будем считать, что $S_0 = S$, т. е. множество особенностей f не пересекается с Ω . (Если все неприводимые компоненты S пересекают Ω , то f продолжается до целой функции в C^{n+1}).

В простом частном случае $m = 1$ ($s \geq 0$ — любое) голоморфная в Ω функция f при каждом фиксированном $a \in E$ голоморфно по w продолжается на всю комплексную плоскость C_w , за исключением некоторой особой точки $\psi(a)$ (если $\psi \equiv \infty$, то f , очевидно, продолжается до целой функции). Как было отмечено выше, если хотя бы одна из этих особенностей неустранима, то $\varphi = 1/\psi$ — целая функция в C_z^1 и f

голоморфно продолжается в $\mathbb{C}^{n+1} \setminus S$, где $S = \{(z, w) : w \cdot \varphi(z) = 1\}$ — аналитическое множество. Из $\Omega \cap S = \emptyset$ следует, что особенность функции $f(z, w)$ при фиксированном $z \in \mathbb{C}^n$ лежит вне Ω , т. е. $|\varphi(z)| \geq \varepsilon(1 + |z|)^s$. Таким образом, для всех $z \in \mathbb{C}^n$ справедливо неравенство $|\varphi(z)| \leq \frac{1}{\varepsilon}(1 + |z|)^s$. По теореме Лиувилля отсюда следует, что $\varphi = P_s$ — многочлен степени не выше s . Следовательно, f продолжается до функции, голоморфной в области $\mathbb{C}^{n+1} \setminus S$, где $S = \{(z, w) : w \cdot P_s(z) = 1\}$ — алгебраическое множество.

Для доказательства теоремы в общем случае мы будем использовать критерий Рудина алгебраичности однородного по размерности алгебраического множества (см. (6), или, например, (6), с. 64) и теорему Ока—Нишино (см. (10), а также (3)).

Как уже отметили, f голоморфно продолжается в $\mathbb{C}^{n+1} \setminus S$, где S — чисто n -мерное аналитическое множество в $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \Omega$. Сделаем дробно-линейное преобразование координат $\beta : (z, w) \rightarrow (z, 1/w)$ и рассмотрим функцию $\tilde{f}(z, w) = f(z, 1/w)$. Так как f голоморфна вне S , то $\tilde{f}$ голоморфна вне образа S при преобразовании β . Следовательно, множество особенностей $\tilde{S}$ функции $\tilde{f}$ принадлежит $\beta(S) \cup \{w=0\}$, где $w = 1/w$. Но $\tilde{S}$ — псевдодугное множество и для любого $a \in \mathbb{C}^n$ множество $(\beta(S) \cup \{w=0\}) \cap \{z=a\}$ содержит не более, чем $m+1$ точку. Поэтому, по теореме Ока—Нишино, $\tilde{S}$ есть аналитическое множество такое, что $(\tilde{S} \cap \{z=a\}) \setminus \{w=0\}$ содержит не более чем m точек для всех $a \in \mathbb{C}^n$. С другой стороны,

$$\tilde{S} \subset \Omega_1 := \mathbb{C}^{n+1} \setminus \beta(S) = \left\{ (z, w) : |w| < \frac{1}{\varepsilon}(1 + |z|)^s \right\},$$

следовательно, по критерию Рудина, $\tilde{S}$ — алгебраическое множество. Пусть S_1 есть объединение компонент $\tilde{S}$, отличных от $\{w=0\}$. Тогда S_1 собственным образом проецируется на $\mathbb{C}^n$, значит (см. (1)) оно есть множество нулей некоторого псевдомногочлена

$$P(z, w) = w^m + a_1(z)w^{m-1} + \dots + a_m(z),$$

где $a_k(z)$, $k=1, 2, \dots, m$ — целые функции в $\mathbb{C}^n$. Из того, что $S_1 \subset \Omega_1$, можно вывести (см. доказательство теоремы Рудина (6) или подготовительной теоремы Вейерштрасса в (1), с. 11), что $|a_k(z)| \leq C(1 + |z|)^{k \cdot s}$, т. е. $a_k(z)$ — многочлен степени не выше $k \cdot s$, $k=1, 2, \dots, m$. Возвращаясь к переменным (z, w) , отсюда получим утверждение теоремы.

В качестве простого следствия из теоремы отметим, что если функция $f = f(z, w)$, $z \in \mathbb{C}^n$, $w \in \mathbb{C}$, голоморфна в единичном шаре в $\mathbb{C}^{n+1}$ и при каждом фиксированном z из некоторого неплюриполярного множества $E \subset \mathbb{C}^n$ функция $f(z, w)$ голоморфно продолжается в $\mathbb{C}_w \setminus S(z)$, где $S(z)$ содержит не более чем m точек, то либо f продолжается до целой функции, либо она голоморфно продолжается в $\mathbb{C}^{n+1}$ вне алгебраического множества особенностей $S = \{(z, w) : P_m(z)w^m + \dots + p_1(z)w = 1\}$, где p_k — многочлен степени не выше k , $k=1, 2, \dots, m$.

Доказательство с помощью преобразования $(z, w) \rightarrow (z', w')$, $z' = z/w$, $w' = w$ сводится к теореме при $s=1$, потому что образом шара будет область $\{(z', w') : |w'| < (1 + |z'|^2)^{-1/2}\}$, которая, очевидно, содержит множество $\Omega = \{(z', w') : |w'| < (1 + |z'|)^{-1}\}$, а функция $\tilde{f}(z', w') = f(z/w, w)$ удовлетворяет всем условиям теоремы (ср. следствии 3 (°)).

Автор благодарен Е. М. Чирке за полезное обсуждение.

Московский институт
электронного машиностроения

Մ. Վ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Հանրահաշվական եզակիությունների ֆունկցիաների հոլոմորֆ
շարունակության մասին

Դիցուք D -ն որևէ տիրույթ է $\mathbb{C}^n$ -ում և $E \subseteq D$ բազմությունը բազմա-
րևեռային չէ: Ենթադրենք $f = f(z, w)$, $z \in \mathbb{C}^n$, $w \in \mathbb{C}$ ֆունկցիան հոլոմորֆ է
 $D \times \{0\}$ -ի որևէ շրջակայքում $\mathbb{C}^{n+1}$ -ում և կամայական ֆիքսած $a \in E$ կետի
համար w փոփոխականի $f(a, w)$ ֆունկցիան հոլոմորֆ շարունակվում է $\mathbb{C}w$
հարթություն, բացառությամբ եզակիությունների մի որևէ $S(a)$ բազմու-
թյունից: Կախված $S(a)$ -ի որակական կամ քանակական բնութագրիչներից,
երբեմն հաջողվում է ապացուցել, որ f ֆունկցիան հոլոմորֆ շարունակվում
է $D \times \mathbb{C}w$ բացառությամբ եզակիությունների մի S բազմությունից, որը հա-
մանման հականիշներով է ստացված: Եթե $S(a)$ -ն վերջավոր թվով կետերի
բազմություն է, ապա որոշ լրացուցիչ պայմանների դեպքում ապացուցվում
է, որ S -ը հանրահաշվական բազմություն է:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 J. Stiak, Ann. Pol. Math., v. 22, № 2, p. 145—171 (1969). 2 А. Садуллаев, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 8 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР), М., с. 65—113 (1985). 3 А. Садуллаев, Е. М. Чирка, Мат. сб., т. 132 (174), № 3, с. 383—390 (1987). 4 М. В. Казарян, ДАН АрмССР, т. 76, № 1, с. 13—17 (1983). 5 М. В. Казарян ДАН АрмССР, т. 87, № 3, с. 106—110 (1988). 6 М. В. Казарян, Мат. сб., т. 125 (167), № 3, с. 384—398 (1984). 7 Е. М. Чирка, Комплексные аналитические множества, Наука, М., 1985. 8 W. Rudin, J. Math. Mech., v. 17, p. 671—683 (1968). 9 K. Oka, J. Sci. Hiroshima Univ., ser. A, v. 4, p. 93—98 (1934). 10 T. Nishino, J. Math. Kyoto Univ., v. 1, p. 225—245 (1962).