ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 91 1990 №1

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

Б. Е. Торосян

Количество и мощности компонент решений дискретной изопериметрической задачи в хэмминговой решетке $\{0,1\}^n$

(Представлено академиком АН Армении Р. Р. Варшамовым 25/IV 1990)

В рамках метрики Хэмминга и естественных пониманий о компонентах множества рассматривается задача описания многокомпонентных подмножеств $A\subseteq E^n=\{0, 1\}^n$, имеющих минимальную границу среди всех подмножеств множества $\{0, 1\}^n$ мощности $|A|$. Устанавливаются: 1) условия существования таких подмножеств заданной мощности с заданным числом компонент; 2) достижимые верхние оценки числа компонент и их мощностей в зависимости от мощности этих подмножеств.

Работа представляет принципиально новые результаты по описанию решений дискретной изопериметрической задачи в пространстве Хэмминга ([1-7]). Она в целом дает достаточно полное представление о многокомпонентных решениях этой задачи и методах их построений.

1. Ниже в неопределенных выражениях относительно множеств $A, B, \ldots$ (или точек $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \ldots$) предполагается, что $A, B, \ldots \subseteq E^n$ (или $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \ldots \in E^n$).

Пусть $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$—расстояние Хэмминга между точками $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, т. е. количество координат, в которых $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ отличаются. Через $S_r^n(\tilde{\alpha})$ обозначим хэмминговый шар радиуса r с центром в точке $\tilde{\alpha}$, т. е. $S_r^n(\tilde{\alpha})=\{\tilde{\beta}/\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})\leqslant r\}$, $0\leqslant r\leqslant n$. Точка $\tilde{\gamma}\in A$ называется внутренней для A, если $S_1^n(\tilde{\gamma})\subseteq A$. В противном случае она называется граничной для A.

Множество внутренних и граничных точек множества A обозначим соответственно через $P(A)$ и $\Gamma(A)$. Положим $p(n, m)=\max\limits_{|A|=m}|P(A)|$ и $g(n, m)=\min\limits_{|A|=m}|\Gamma(A)|$, $0\leqslant m\leqslant 2^n$. Соотношения $P(A)\cup\Gamma(A)=A$ и $p(n, m)+g(n, m)=m$ следуют из определений.

Известный дискретный аналог классической изопериметрической задачи предполагает отыскание эффективных описаний множеств A, удовлетворяющих условию $|P(A)|=p(n, |A|)$. Полное множество таких A обозначим через $\bar{T}(n)$ и положим $\bar{T}(n, m)=\{A\in\bar{T}(n)/|A|=m\}$.

Под „эффективным описанием“ здесь понимается описание при помощи известных, хорошо изученных или легковоспринимаемых конструкций и количественных характеристик, определенных для множеств $A \subseteq E^n$ и выбранных по естественным для исследнвания задачи соображениям. В настоящей работе описание осуществляется при помощи представления множества $A \in \mathcal{T}(n)$ в виде объединения непересекающихся элементов из $\mathcal{T}(n)$.

2. Для рассматриваемых нами вопросов важное значение имеет последовательность L^n, построенная из всех различных точек множества E^n следующим образом: а) если $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ и $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i < \sum_{i=1}^{n} \beta_i$, то точка $\tilde{\alpha}$ в L^n предшествует точке $\tilde{\beta}$; б) если $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i$ и $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot 2^{n-i} > \sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot 2^{n-i}$, то точка $\tilde{\alpha}$ в L^n предшествует точке $\tilde{\beta}$.

Множество, состоящее из первых m точек последовательности L^n, обозначим через L^n_m, $0 \leqslant m \leqslant 2^n$. Известно [1,3–5], что $L^n_m \in \mathcal{T}(n, m)$.

В некоторых случаях пользуемся представлением числа m, $0 \leqslant m \leqslant 2^n$, в виде

$$m = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} + \delta; \quad 0 \leqslant k < n; \quad 0 \leqslant \delta < \binom{n}{k+1} \tag{1}$$

Число m называется *критическим* (для данного n) [4,5], если $p(n, m) > p(n, m-1)$.

Пусть $S(A) = \{\alpha \in A / P(A \setminus \{\alpha\}) = P(A)\}$. Множество A называется *критическим* [4,5] если $S(A) = \varnothing$. Далее, пусть $\mathcal{K}(n) = \{A \in \mathcal{T}(n) / S(A) = \varnothing\}$ и $\mathcal{K}(n, m) = \{A \in \mathcal{K}(n) / |A| = m\}$. Известно [4,5], что если m — критическое, то $\mathcal{K}(n, m) = \mathcal{T}(n, m)$.

Если $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_s$, то множества $A_1, A_2, \ldots, A_s$ назовем *слагаемыми* или *компонентами* разбиения множества A. Разбиение $A = A_1 \cup \ldots \cup A_s$ назовем *правильным*, если выполняются условия: а) $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$; б) $P(A) = \bigcup_{i=1}^{s} P(A_i)$. Правильное разбиение $A = A_1 \cup \ldots \cup A_s$ назовем: а) *тривиальным*, если $s = 1$; б) *приведенным*, если ни одно из слагаемых $A_1, \ldots, A_s$ не допускает нетривиального правильного разбиения; в) *каноническим*, если оно приведенное и $|A_1| \geqslant |A_2| \geqslant \ldots \geqslant |A_s|$.

Легко видеть, что приведенное разбиение множества единственно с точностью до перестановки слагаемых. Кроме того, его можно получить из всякого правильного разбиения, путем образования приведенных разбиений слагаемых.

Через $s(A)$ обозначим количество слагаемых приведенного разбиения множества A.

3. Перейдем к формулировкам основных результатов настоящей работы.

Теорема 1. *Если* $A \in \mathcal{T}(n, m)$, *то* $s(A) \leqslant |S(L^n_m)| + 1$.

Пусть $\alpha(A)$ обозначает последнюю точку множества A по ходу построения последовательности L^n.

Следствие 1. 1) *Если* $A \in \mathcal{T}(n, m)$ *и* m *имеет вид* (1), *то*

$s(A)\leqslant n-k$; 2) *если* $A\in\mathscr{T}(n, m)$, $\alpha(L^n_m)=(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, 1, 0, \underbrace{\ldots, 0}_{t-1}, 1, 0, \ldots, 0)$, $r+t+1<n$, *то* $s(A)\leqslant t+1$.

Теорема 2. *Если* $A\in\mathscr{K}(n, m)$, *то* $s(A)\leqslant\min\{|S(L^n_m)|; |S(L^n_{p(n,m)})|\}+1$.

Теорема 3. 1) *Если* $A\in\mathscr{K}(n, m)$ *и* m *имеет вид* (1), *то* $s(A)\leqslant\frac{\sqrt{8n+(2k+1)^2}-(2k+1)}{2}$; 2) *если* $A\in\mathscr{K}(n)$, *то* $s(A)\leqslant\frac{\sqrt{8n+9}-3}{2}$.

Теорема 4. *Пусть* m *имеет вид* (1) *при* $k\leqslant 1$ *или* $k\geqslant\sqrt{n-1}-1$ *и* $A=A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_s$ *— каноническое разбиение множества* $A\in\mathscr{T}(n, m)$. *Тогда* $|A_2\cup\ldots\cup A_s|<\min\left\{\lambda; \binom{n}{2}+n\right\}$.

Множество B называется шарообразным, если $S^n_r(\alpha)\subseteq B\subset S^n_{r+1}(\alpha)$ для некоторых r и α.

Теорема 5. *Для существования множества* $A\in\mathscr{K}(n, m_0)$ *необходимо существование множества* $B\in\mathscr{K}(n, |B|)$, *где* $|B|=m_0-|S(L^n_m)|$ *при* $m=m_0-(s(A)-1)(n+1)$, *и* $p(n, |B|)=p(n, m_0)$, *приведенное разбиение которого состоит из одного шарообразного множества* $B_0\in\mathscr{K}(n, m-S(L^n_m)|)$ *и* $s(A)-1$ *шаров единичного радиуса*.

Следствие 2. *Количество значений* m, *для которых существует множество* $A\in\mathscr{K}(n, m)$, *удовлетворяющее условию* $s(A)\geqslant 2$, *не меньше* $2^{\frac{n-5}{2}}$ $(n>5)$.

Для данного k, $0\leqslant k<n$, через $s(k)$ обозначим максимальное значение $s(A)$ среди всех множеств $A\in\mathscr{K}(n)$ мощности вида (1) (при всевозможном изменении λ). Определим также $m(s, k)$ как минимальное число вида (1), для которого существует множество $A\in\mathscr{K}(n, m(s, k))$, удовлетворяющее условию $s(A)=s$, $1\leqslant s\leqslant s(k)$.

Теорема 6. 1) *Для всякого* s, $1\leqslant s\leqslant s(k)$, *существует множество* $A\in\mathscr{K}(n)$ *мощности* (1), *удовлетворяющее условию* $s(A)=s$; 2) $m(1, k)<m(2, k)<\ldots<m(s(k), k)$.

Пусть m_1 и m_2 последовательные критические числа (для данного n), $0\leqslant m_1\leqslant m_2\leqslant 2^n$. Определим $m(s, m_1, m_2)$ как минимальное число в промежутке $[m_1, m_2]$, для которого существует множество $A\in\mathscr{K}(n, m(s, m_1, m_2))$, удовлетворяющее условию $s(A)=s$. Через $s(m_1, m_2)$ обозначим максимальное значение s, для которого число $m(s, m_1, m_2)$ существует.

Теорема 7. 1) *Если* $s(m_1, m_2)>1$, *то число* $m(2, m_1, m_2)$ *существует и при существовании числа* $m(s, m_1, m_2)$, $2<s\leqslant s(m_1, m_2)$ имеет место неравенство $m(2, m_1, m_2)<m(s, m_1, m_2)$; 2) *если* m_1 *имеет вид* (1) *при* $k\leqslant 1$ *или* $k\geqslant\sqrt{n-1}-1$, *то:* а) *число* $m(s, m_1, m_2)$ *существует при любом* s, $1\leqslant s\leqslant s(m_1, m_2)$; б) $m(1, m_1, m_2)<m(2, m_1, m_2)<\ldots<m(s(m_1, m_2), m_1, m_2)$; 3) *если* $A\in\mathscr{K}(n, m(s, m_1, m_2))$ *и* $A=A_1\cup\ldots\cup A_s$ *— каноническое разбиение множества* A, *то:* а) $A_1\in\mathscr{K}(n, |A_1|)$ *и* $|A_1|$ *— критическое число;* б) *каждое из компонент* $A_2, \ldots, A_s$ *— шар единичного радиуса (при* $s\geqslant 2$).

Вычислительный центр Академии наук
Армении и Ереванского
государственного университета

Բ. Ե. ԹՈՐՈՍՅԱՆ

Դիսկրետ իզոպերիմետրիկ խնդրի լուծումների բաղադրիչների քանակը և հզորությունները հեմինգյան $\{0,1\}^n$ ցանցում

Դասական իզոպերիմետրիկ խնդրի հայտնի դիսկրետ նմանատիպը վերաբերվում է $\{0,1\}^n$ ցանցի այն ենթաբազմությունների կառուցմանը կամ նկարագրմանը, որոնցից յուրաքանչյուրն իր հզորությունն ունեցող բոլոր ենթաբազմությունների շրջանում ունի փոքրագույն եզր ըստ Հեմինգի մետրիկայի: Դիցուք $\mathcal{T}(n)$-ը այդպիսի ենթաբազմությունների բազմությունն է:

Աշխատանքում դիտարկվում է $\mathcal{T}(n)$ բազմության բազմաբաղադրիչային տարրերի կառուցման և նկարագրման խնդիրը:

Հաստատվում են. 1) տրված հզորություն և բաղադրիչների քանակն ունեցող $A \in \mathcal{T}(n)$ բազմության գոյության անհրաժեշտ, անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ; 2) $\mathcal{T}(n)$ բազմության տարրերի բաղադրիչների քանակի և հզորությունների հասանելի վերին գնահատականներ՝ կախված այդ տարրերի հզորություններից: Հիմնական արդյունքների ապացույցների կառուցողականությունները տալիս են անմիջական կամ լրիվ պատկերացում $\mathcal{T}(n)$ բազմության բազմաբաղադրիչ տարրերի և դրանց կառուցման մեթոդների մասին:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *L. H. Harper* J. Combin. Theory, v. 1, № 3, p. 385—393 (1966). [2] *Р. Г. Нигматуллин*, Дискретный анализ, вып. 9, Новосибирск, с. 47—58, 1967. [3] *G. O. H. Katona*, Studia Sci. Math. Hungarica, v. 10, p. 131—140 (1975). [4] *Л. А. Асланян, В. М. Караханян, Б. Е. Торосян*, ДАН СССР, т. 241, № 1, с. 11—14 (1978). [5] *Л. А. Асланян*, Проблемы кибернетики, вып. 36, М., Наука, с. 85—127, 1979. [6] *С. Л. Безруков*, ДАН СССР, т. 289, № 3, с. 520—524 (1984). [7] *С. Л. Безруков*, Мат. сб., т. 135 (177), № 1, с. 80—95 (1988).