ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 91 1990 №1

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

С. Х. Дарбинян

О гамильтоновых и сильно гамильтоново-связных орграфах

(Представлено академиком АН Армении Р. Р. Варшамовым 12 IV 1990)

В настоящей статье рассматриваются конечные орграфы, без петель и кратных дуг. Орграф называется сильно гамильтоново-связным если для любых двух различных вершин x и y существует гамильтоновый путь из вершины x в вершину y. Через $V(G)$, $E(G)$, $\langle A\rangle$, где $A\subseteq V(G)$, и $\delta(G)$ обозначим соответственно множество вершин, множество дуг, подорграф, порожденный подмножеством вершин A, и минимальную степень орграфа G. Будем говорить, что p-вершинный ($p\geqslant 2$) орграф G удовлетворяет условию N (условию M), если сумма степеней любых двух несмежных различных вершин $x, y\in V(G)$ ($x, y\in V(G)-\{z_0\}$, где z_0 некоторая вершина орграфа G) не меньше $2p+1$ ($2p-1$).

В работе ([1]) доказано, что для любого $k\geqslant 1$ существует 2-связный p-вершинный не сильно гамильтоново-связный орграф G с $\delta(G)\geqslant p+k$. В той же работе ([1]) (см. также ([2])) Томассеном были выдвинуты следующие гипотезы.

1. Всякий p-вершинный 3-связный орграф G с $\delta(G)\geqslant p+1$ является сильно гамильтоново-связным.

2. Всякий p-вершинный 4-связный орграф G, удовлетворяющий условию N, является сильно гамильтоново-связным.

В настоящей статье опровергается первая гипотеза Томассена и доказывается, что любой p-вершинный сильно связный орграф, удовлетворяющий условию M, содержит контур длины не меньше $p-1$.

Для опровержения гипотезы 1 нам понадобятся леммы 1 и 2.

Лемма 1. *Любой $(p+1)$-вершинный 3-связный орграф G с $\delta(G)\geqslant p+2$ является сильно гамильтоново-связным тогда и только тогда, когда любой p-вершинный 2-связный орграф, имеющий $p-1$ вершин со степенями, не меньшими, чем p, является гамильтоновым.*

Приведем лишь схему доказательства леммы 1.

а) Предположим, что любой p-вершинный 2-связный орграф, имеющий $p-1$ вершин со степенями, не меньшими, чем p, является гамильтоновым. Пусть G есть $(p+1)$-вершинный 3-связный орграф с $\delta(G)\geqslant p+2$ и пусть u, v произвольные различные вершины орграфа G. Следуя ([3]), возьмем орграф H с множеством вершин

$$V(H)=V(G)-\{u, v\}\cup\{x\},$$

где x — новая вершина, и с множеством дуг

$$E(H)=E(\langle V(G)-\{u, v\}\rangle)\cup\{xy/uy\in E(G)\}\cup\{zx/zv\in E(G)\}.$$

Нетрудно проверить, что орграф H является 2-связным и имеет $p-1$ вершин со степенями, не меньшими, чем p. Поэтому, по предположению, H—гамильтоновый. Значит, в G существует гамильтоновый путь из u в v.

б) Теперь предположим, что любой $(p+1)$ вершинный 3-связный орграф Q с $\delta(Q)\geqslant p+2$ является сильно гамильтоново-связным. Пусть G есть p-вершинный 2-связный орграф, имеющий $p-1$ вершин со степенями, не меньшими, чем p, и пусть x_0—та вершина орграфа G, которая имеет минимальную степень. Рассмотрим орграф G' с множеством вершин

$$V(G')=V(G)-\{x_0\}\cup\{u, v\},$$

где u и v новые вершины, и с множеством дуг

$$E(G')=E(<V(G)-\{x_0\}>)\cup\{uv, vu\}\cup\{xu, vx/x\in V(G)-\{x_0\}\}\cup$$
$$\cup\{ux/x_0x\in E(G)\}\cup\{yv/yx_0\in E(G)\}.$$

G' является $(p+1)$-вершинным 3-связным орграфом и $\delta(G')\geqslant \geqslant p+2$. Следовательно, по предположению, G' содержит гамильтоновый путь из u в v. Значит, G—гамильтоновый.

Лемма 2. *Для любого* $p(p\geqslant 8)$ *существует* p-*вершинный 2-связный негамильтоновый орграф, имеющий* $p-1$ *вершин со степенями, не меньшими, чем* p.

Для доказательства леммы 2 рассматривается p-вершинный $(p\geqslant 8)$ орграф G с множеством вершин

$$V(G)=\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{p-4}, y_1, y_2, y_3\}$$

и с множеством дуг

$$E(G)=\{y_iy_j/i\neq j\}\cup\{x_ix_{i+1}/1\leqslant i\leqslant p-5\}\cup\{y_ix_j/1\leqslant i\leqslant 3,$$
$$1\leqslant j\leqslant p-6\}\cup\{x_{p-4}y_i, x_{p-6}y_i/1\leqslant i\leqslant 3\}\cup\{x_ix_{p-5}/$$
$$1\leqslant ip\leqslant p-6\}\cup\{x_0x_1, x_0x_{p-5}, x_{p-5}x_0, x_{p-4}x_0, x_{p-6}x_{p-4}\}\cup$$
$$\cup\{x_ix_j/1\leqslant j<i\leqslant p-4\}$$

Орграф G удовлетворяет условиям леммы 1 и является негамильтоновым.

С помощью лемм 1 и 2 доказывается

Теорема 1. *Для любого* p $(p\geqslant 9)$ *существует* p-*вершинный 3-связный не сильно гамильтоново-связный орграф* G *с* $\delta(G)\geqslant p+1$.

Аналогично лемме 1 доказывается

Лемма 3. *Любой* $(p+1)$-*вершинный 4-связный орграф, удовлетворяющий условию* N, *является сильно гамильтоново-связным тогда и только тогда, когда любой* p-*вершинный 3-связный орграф, удовлетворяющий условию* M, *является гамильтоновым.*

Теперь изучим свойства контуров максимальных длин в сильно связных орграфах при условии M. Для этой цели нам понадобится следующая

Лемма 4 ([4]). *Пусть* p-*вершинный орграф* G *содержит контур* C_k (*путь* $P=x_1x_2\ldots x_k$), *где* $k\geqslant 2$. *Если для некоторой вершины* $x\in V(G)-V(C_k)$ $(x\in V(G)-V(P))$ *имеет место* $d(x, V(C_k))\geqslant \geqslant k+1$ $(d(x, V(P))\geqslant k+2)$, *то* G *содержит* C_{k+1} (*путь* Q *из верши-*

ны x_1 в вершину x_k) такой, что $V(C_{k+1})=V(C_k)\cup\{x\}$ ($V(Q)=V(P)\cup\{x\}$, т. е. путь P можно удлинить с помощью вершины x).

В дальнейшем нам понадобятся следующие обозначения:

$$E(B\to D)=\{xy\in E(G): x\in B,\ y\in D\},\ E(B,D)=E(B\to D)\cup$$
$$\cup E(D\to B);\ d(x,B)=|E(\{x\},B)|,\ d(x)=|E(\{x\},V(G))|,$$

где $B, D\subseteq V(G)$ и $x\in V(G)$.

Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть G есть p-вершинный ($p\geqslant 2$) сильно связный орграф, удовлетворяющий условию M. Тогда G — гамильтоновый или содержит контур длины $p-1$.*

Приведем лишь схему доказательства теоремы 2. Предположим, что теорема не верна. Пусть $C_m=x_1x_2\ldots x_mx_1$ — контур максимальной длины в G (всюду индексы вершин контура C_m берутся по $\mathrm{mod}(m)$). Тогда $p-m\geqslant 2$, $p\geqslant 5$ и справедливы следующие утверждения:

Утверждение 1. *По крайней мере две вершины контура C_m смежны с вершинами из множества $A-\{z_0\}$, где $A=V(G)-V(C_m)$.*

Утверждение 2. *Если подорграф $\langle A\rangle$ не односторонне связный, то $z_0\in A$ и подорграф $\langle A-\{z_0\}\rangle$ односторонне связный.*

Пусть $G_1, G_2, \ldots, G_s$ бикомпоненты $\langle A\rangle$ ($\langle A-\{z_0\}\rangle$), если $\langle A\rangle$ является односторонне связным (если $\langle A\rangle$ не является односторонне связным), которые пронумерованы таким образом, что

$$E(V(G_i)\to V(G_{i+1}))\neq\varnothing,\ 1\leqslant i\leqslant s-1.$$

Далее с помощью утверждений 1 и 2 получаем, что

$$E(V(C_m)\to V(G_1))\neq\varnothing,\ E(V(G_s)\to V(C_m))\neq\varnothing \tag{1}$$

и существуют такие вершины $x_a, x_b\in V(C_m)$, $x_a\neq x_b$, $u\in V(G_k)$, $v\in V(G_l)$, $1\leqslant k\leqslant l\leqslant s$, что x_au, $vx_b\in E(G)$ и

$$E\left(B\to\bigcup_{i=1}^{l}V(G_i)\right)=E\left(\bigcup_{i=1}^{s}V(G_i)\to B\right)=\varnothing, \tag{2}$$

где $B=\{x_{a+1}, x_{a+2}, \ldots, x_{b-1}\}$. Удлиним путь $x_bx_{b+1}\ldots x_a$ с помощью вершин из множеста B, насколько это возможно. С помощью (2) и леммы 4 получаем, что существуют такие вершины $y_1, y_2, \ldots, y_d\in B$, $1\leqslant d\leqslant|B|$, что для любых вершин y_i и $z\in V(G_t)$, $1\leqslant t\leqslant l$ (вершины y_i и z несмежны между собой) имеют место

$$d(y_i, V(C_m))\leqslant m+d-1, \tag{3}$$

$$d(y_i,A)\leqslant\begin{cases}p-m-|V(G_t)|, & \text{если } \langle A\rangle \text{ односторонне связный,}\\ p-m-1-|V(G_t)|+d(y_i,z_0), & \text{в противном случае}\end{cases} \tag{4}$$

$$d(z, V(C_m))\leqslant m-|B|+1, \tag{5}$$

$$d(z,A)\leqslant\begin{cases}p-m+|V(G_t)|-2, & \text{если } \langle A\rangle \text{ односторонне связный,}\\ p-m+|V(G_t)|+d(z,z_0)-3, & \text{в противном случае.}\end{cases} \tag{6}$$

Отсюда и из максимальности контура C_m получаем, что подорграф $\langle A\rangle$ является односторонне связным. Из неравенств (3)—(6) имеем

$$d(y_i)+d(z)\leqslant 2p-2. \tag{7}$$

Предположим, что $z_0 \in A$. Тогда из (7) следует, что $l=1$, $\{z_0\}=V(G_1)$ и $s\geqslant 2$. Если $E(B\to V(G_s))=\varnothing$, то из (2) имеем, что $E(B, V(G_s))=\varnothing$. Отсюда, аналогично (7), получаем $d(y_i)+d(x)\leqslant 2p-2$, где $x\in V(G_s)$, а это, так как $s\geqslant 2$ и $\{z_0\}=V(G_1)$, является противоречием. Если же $E(B\to V(G_s))\neq\varnothing$, то из (1) и (2) следует существование таких вершин $x_r, x_q\in V(C_m)$, $x_r\neq x_q$, $u_1\in V(G_l)$, $v_1\in V(G_s)$, что $x_r u_1$, $v_1 x_q \in E(G)$ и

$$E(D\to A)=E(V(G_s)\to D)=\varnothing,$$

где $D=\{x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_{q-1}\}$. Отсюда, аналогично (7), получаем, что для некоторых вершин $x_i\in D$ и $x\in V(G_s)$ имеет место $d(x_i)+d(x)\leqslant 2p-2$, а это, так как $z_0\notin\{x_i, x\}$, является противоречием.

Теперь предположим, что $z_0\notin A$. Тогда из (7) вытекает, что $y_i=z_0$. Значит $d=1$, т. е. существует путь из x_b в x_a с множеством вершин $V(C_m)-\{z_0\}$. Этот путь и вершина u составляют контур длины m, не содержащий вершину z_0. Итак, мы пришли к одному из выше рассмотренных случаев.

Следствие. *Пусть G есть p-вершинный ($p\geqslant 2$) сильно связный орграф. Если степени $p-1$ вершин орграфа G не меньше, чем $p-1$, то G является гамильтоновым или содержит контур длины $p-1$.*

Вычислительный центр Академии наук
Армении и Ереванского
государственного университета

Ս. Խ. ԴԱՐԲԻՆՅԱՆ

Համիլտոնյան և ուժեղ համիլտոնյան կապակցված կողմնորոշված գրաֆների մասին

Թոմասենը աշխատանք ([1])-ում ենթադրում է, որ ցանկացած p*-գագաթանի 3-կապակցված կողմնորոշված գրաֆ, որի մինիմալ աստիճանը փոքր չէ* p+*1-ից, հանդիսանում է ուժեղ համիլտոնյան կապակցված։*

Ներկա աշխատանքում հերքվում է այդ ենթադրությունը և ապացուցվում է՝

Թեորեմ. Ցանկացած $p\,(p\geqslant 9)$ ամբողջ թվի համար գոյություն ունի p-գագաթանի 3-կապակցված ոչ ուժեղ համիլտոնյան-կապակցված կողմնորոշված գրաֆ, որի մինիմալ աստիճանը փոքր չէ p+*1-ից*։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *C. Thomassen*, J. of Combin. Theory, B 23, S. 142—163 (1980). [2] *J. C. Bermond, C. Thomassen*, Prepr. Ser. Mat. Inst. Aarhys univ., v. 10 (1980—1981). [3] *M. Overbeck-Lartsch*, J. of Combin. Theory, B 21, S. 76—80 (1976). [4] *C. Thomassen*, Discrete Mathematics, v. 19, p. 85—92 (1977).