

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. В. Тоноян

О двух осесимметричных задачах для упругого
 трансверсально-изотропного пространства
 с круглой цилиндрической полостью

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 26/IV 1990)

Рассматриваются две осесимметричные задачи для упругого трансверсально-изотропного пространства с круглым цилиндрическим ослаблением бесконечной длины, когда на конечном участке на поверхности полости действуют равномерно распределенные осесимметричные нагрузки (приложенные нормально к поверхности полости или касательно-параллельно к оси полости).

Получены выражения для определения в упругой среде перемещений и напряжений. Из полученных выражений найдены соответствующие значения для искомых величин, для случая, когда упругое тело является изотропным.

1. *Постановка и решение симметричной задачи.* Вначале рассматривается симметричный случай (на поверхности полости нагрузка на участке $-\varepsilon < z < \varepsilon$ задается приложенной нормально к поверхности). В этом случае достаточно задачу рассматривать для половины пространства $z > 0$ с граничными условиями

$$u_z|_{z=0} = \tau_{rz}|_{z=0} = \tau_{rz}|_{r=R} = 0, \quad \sigma_r|_{r=R} = \begin{cases} -p & 0 < z < \varepsilon, \\ 0 & z > \varepsilon \end{cases}, \quad (1.1)$$

где R — радиус цилиндрической полости.

Решение задачи строится при помощи функций Эллиотта ^(1,2) $\Phi_1(r, z)$ и $\Phi_2(r, z)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$\nabla_i^2 \Phi_i = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + i_i^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi_i = 0 \quad (i=1, 2). \quad (1.2)$$

Перемещения и напряжения выражаются при помощи этих функций соотношениями

$$u_r(r, z) = \frac{\partial}{\partial r} (\Phi_1 + \Phi_2), \quad u_z = k_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + k_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}; \quad (1.3)$$

$$\sigma_z(r, z) = A_{44} \left[(1+k_1) i_1^2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} + (1+k_2) i_2^2 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} \right];$$

$$\sigma_r(r, z) = -\frac{A_{11}-A_{12}}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\Phi_1 + \Phi_2) + A_{44} \left[(1+k_1) \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} + (1+k_2) \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} \right];$$

$$\tau_{rz}(r, z) = A_{44} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} [(1+k_1)\Phi_1 + (1+k_2)\Phi_2].$$

где $i_i^2 (i=1, 2)$ — неравные корни уравнения,

$$A_{11}A_{44}i^4 + [A_{12}(A_{12} + 2A_{44}) - A_{11}A_{22}]i^2 + A_{11}A_{44} = 0, \quad (1.4)$$

$$k_i = \frac{A_{11}i_i^2 - A_{44}}{A_{12} + A_{44}}, \quad (i=1, 2), \quad (1.5)$$

а A_{ij} — упругие постоянные из уравнений обобщенного закона Гука (1)

$$\sigma_r = A_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + A_{12} \frac{u_r}{r} + A_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z};$$

$$\sigma_\theta = A_{12} \frac{\partial u_r}{\partial r} + A_{11} \frac{u_r}{r} + A_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad (1.6)$$

$$\sigma_z = A_{13} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) + A_{44} \frac{\partial u_z}{\partial z};$$

$$\tau_{rz} = A_{44} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right).$$

Решения уравнений (1.2) для упомянутой задачи берутся в виде

$$\Phi_i(r, z) = \int_0^\infty C_i(\gamma) \cos(\gamma z) K_0(i_i \gamma r) d\gamma \quad (i=1, 2). \quad (1.7)$$

Используя функции (1.7) по формулам (1.3), будем иметь

$$u_r = - \int_0^\infty \gamma \cos(\gamma z) [i_1 C_1(\gamma) K_1(i_1 \gamma r) + i_2 C_2(\gamma) K_1(i_2 \gamma r)] d\gamma;$$

$$u_z = - \int_0^\infty \gamma \sin(\gamma z) [k_1 C_1(\gamma) K_0(i_1 \gamma r) + k_2 C_2(\gamma) K_0(i_2 \gamma r)] d\gamma;$$

$$\sigma_r = \frac{A_{11} - A_{12}}{r} \int_0^\infty \gamma \cos(\gamma z) [i_1 C_1(\gamma) K_1(i_1 \gamma r) + i_2 C_2(\gamma) K_1(i_2 \gamma r)] d\gamma + \quad (1.8)$$

$$+ A_{44} \int_0^\infty \gamma^2 \cos(\gamma z) [(1 + k_1) C_1(\gamma) K_0(i_1 \gamma r) + (1 + k_2) C_2(\gamma) K_0(i_2 \gamma r)] d\gamma;$$

$$\tau_{rz} = A_{44} \int_0^\infty \gamma^2 \sin(\gamma z) [(1 + k_1) i_1 C_1(\gamma) K_1(i_1 \gamma r) + (1 + k_2) i_2 C_2(\gamma) K_1(i_2 \gamma r)] d\gamma;$$

$$\sigma_z = - A_{44} \int_0^\infty \gamma^2 \cos(\gamma z) [(1 + k_1) i_1^2 C_1(\gamma) K_0(i_1 \gamma r) + (1 + k_2) i_2^2 C_2(\gamma) K_0(i_2 \gamma r)] d\gamma.$$

Удовлетворив граничным условиям (1.1) и переходя к пределу для случая, если нормальная нагрузка приложена на боковой поверхности в сечении $z=0$ в виде распределенных сосредоточенных сил с интенсивностью P

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} p_2 = \frac{P}{2}, \quad (1.9)$$

для неизвестных функций интегрирования найдем

$$C_1(\gamma) = \frac{P}{\pi \gamma \Omega} (1+k_2) \lambda_2 K_1(\lambda_2 \gamma R) \quad (1.10)$$

и

$$C_2(\gamma) = -\frac{P}{\pi \gamma \Omega} (1+k_1) \lambda_1 K_1(\lambda_1 \gamma R), \quad (1.11)$$

где введено обозначение

$$\Omega(\gamma) = \frac{A_{11} - A_{12}}{R} \lambda_1 \lambda_2 (k_2 - k_1) K_1(\lambda_1 \gamma R) K_1(\lambda_2 \gamma R) + \\ + A_{44} \gamma (1+k_1)(1+k_2) \lambda_2 K_0(\lambda_1 \gamma R) K_1(\lambda_2 \gamma R) - \lambda_1 K_0(\lambda_2 \gamma R) K_1(\lambda_1 \gamma R). \quad (1.12)$$

Используя найденные значения для перемещений и напряжений, будем иметь

$$u_r = \frac{P}{\pi} \int_0^\infty \frac{\gamma \lambda_1 \lambda_2 \cos(\gamma z)}{\Omega(\gamma)} [(1+k_1) K_1(\lambda_1 \gamma R) K_1(\lambda_2 \gamma r) - (1+k_2) K_1(\lambda_2 \gamma R) K_1(\lambda_1 \gamma r)] d\gamma; \quad (1.13)$$

$$u_z = \frac{P}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(\gamma z)}{\Omega(\gamma)} [\lambda_1 (1+k_1) k_2 K_1(\lambda_1 \gamma R) K_0(\lambda_2 \gamma r) - \\ - \lambda_2 (1+k_2) k_1 K_1(\lambda_2 \gamma R) K_0(\lambda_1 \gamma r)] d\gamma; \quad (1.14)$$

$$\sigma_z = \frac{A_{44} P}{\pi} \int_0^\infty \frac{\gamma \lambda_1 \lambda_2 (1+k_1)(1+k_2)}{\Omega(\gamma)} \cos(\gamma z) [\lambda_2 K_0(\lambda_2 \gamma r) K_1(\lambda_1 \gamma R) - \\ - \lambda_1 K_0(\lambda_1 \gamma r) K_1(\lambda_2 \gamma R)] d\gamma; \quad (1.15)$$

$$\tau_{rz} = \frac{(A_{11} - A_{12}) P}{\pi r} \int_0^\infty \frac{\gamma \lambda_1 \lambda_2 \cos(\gamma z)}{\Omega(\gamma)} [(1+k_2) K_1(\lambda_1 \gamma r) K_1(\lambda_2 \gamma R) - \\ - (1+k_1) K_1(\lambda_2 \gamma r) K_1(\lambda_1 \gamma R)] d\gamma + \frac{A_{44} P}{\pi} \int_0^\infty \frac{\gamma (1+k_1)(1+k_2)}{\Omega(\gamma)} \times \\ \times \cos(\gamma z) [\lambda_2 K_0(\lambda_1 \gamma r) K_1(\lambda_2 \gamma R) - \lambda_1 K_0(\lambda_2 \gamma r) K_1(\lambda_1 \gamma R)] d\gamma; \quad (1.16)$$

$$\tau_{rz} = \frac{A_{44} P}{\pi} \int_0^\infty \frac{\gamma \lambda_1 \lambda_2 (1+k_1)(1+k_2)}{\Omega(\gamma)} \sin(\gamma z) [K_1(\lambda_1 \gamma r) K_1(\lambda_2 \gamma R) - K_1(\lambda_2 \gamma r) K_1(\lambda_1 \gamma R)] d\gamma. \quad (1.17)$$

Для изотропного пространства, учитывая значения $A_{11} = A_{33} = \lambda + 2G$; $A_{12} = A_{21} = \lambda$; $A_{44} = G$ и переходя в выражениях (1.13)–(1.17) к пределу при $\lambda_l \rightarrow 1$, $K_l \rightarrow 1$ ($l = 1, 2$), будем иметь

$$u_r = \frac{RP}{2\pi G} \int_0^\infty \frac{\cos(\gamma z)}{\Omega_0(\gamma)} [\gamma r K_1(\gamma R) K_0(\gamma r) - \gamma R K_0(\gamma R) K_1(\gamma r) + \\ + 2(1-\nu) K_1(\gamma R) K_1(\gamma r)] d\gamma,$$

$$u_z = -\frac{RP}{2\pi G} \int_0^\infty \frac{\sin(\gamma z)}{\Omega_0(\gamma)} [\gamma R K_0(\gamma R) K_0(\gamma r) + 2(1-\nu) K_1(\gamma R) K_0(\gamma r) - \\ - \gamma r K_1(\gamma R) K_1(\gamma r)] d\gamma,$$

$$\sigma_z = \frac{RP}{\pi} \int_0^\infty \frac{\gamma \cos(\gamma z)}{\Omega_0(\gamma)} [\gamma r K_1(\gamma R) K_1(\gamma r) - 2K_1(\gamma R) K_0(\gamma r) - \gamma R K_0(\gamma R) K_0(\gamma r)] d\gamma,$$

$$\tau_r = \frac{RP}{\pi r} \int_0^\infty \frac{\cos(\gamma z)}{\Omega_0(\gamma)} [\gamma^2 r R K_0(\gamma R) K_0(\gamma r) - \gamma^2 r K_1(\gamma R) K_0(\gamma r) - \\ - \gamma R K_0(\gamma R) K_1(\gamma r) - (2-2\nu + \gamma^2 r^2) K_1(\gamma R) K_1(\gamma r)] d\gamma,$$

$$\tau_{rz} = \frac{RP}{\pi} \int_0^\infty \frac{\gamma^2 \sin(\gamma z)}{\Omega_0(\gamma)} [R K_0(\gamma R) K_1(\gamma r) - r K_0(\gamma r) K_1(\gamma R)] d\gamma,$$

где

$$\Omega_0(\gamma) = \gamma^2 R^2 K_0^2(\gamma R) - (2-2\nu + \gamma^2 R^2) K_1^2(\gamma R).$$

2. *Решение антисимметричной задачи.* Здесь рассматривается антисимметричный случай (на поверхности полости нагрузка на участке $-\epsilon < z < \epsilon$ задается приложенной касательно к поверхности, направленной параллельно оси полости). В этом случае задача рассматривается для половины пространства $z > 0$ с граничными условиями

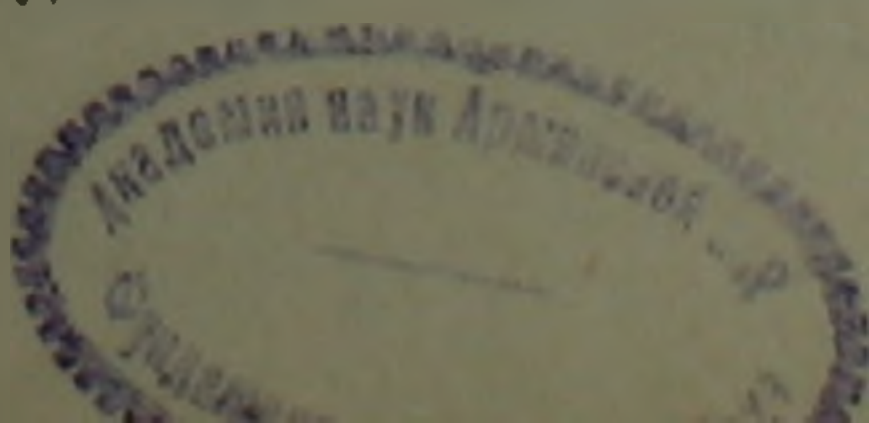
$$u_r|_{z=0} = u_z|_{z=0} = \sigma_r|_{r=R} = 0; \quad \tau_{rz} = \begin{cases} q & 0 < z < \epsilon \\ 0 & z > \epsilon \end{cases} \quad (2.1)$$

Для решения этой задачи пользуемся соотношениями (1.2) — (1.6) и решения уравнений (1.2) берем в виде

$$\Phi_i(r, z) = \int_0^\infty B_i(\gamma) \sin(\gamma z) K_0(\gamma r) d\gamma \quad (i=1, 2). \quad (2.2)$$

Составляя выражения для перемещений и напряжений, соответствующие выражениям (1.8), удовлетворив граничным условиям (2.1) и используя также обозначение вида (1.9) для случая, если $\epsilon \rightarrow 0$, определим неизвестные функции интегрирования $B_i(\gamma)$ ($i=1, 2$). Далее для определения перемещений и напряжений в упругой среде в этом случае получим следующие выражения:

$$u_r = \frac{Q}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(\gamma z)}{\gamma M(\gamma)} \left\{ \gamma [(1+k_1)\gamma^2 K_0(\gamma_1 R) K_1(\gamma_2 r) - (1+k_2)\gamma^2 K_0(\gamma_2 R) K_1(\gamma_1 r)] + \right.$$



$$+ \frac{A_{11} - A_{12}}{A_{44}R} \gamma_1 \gamma_2 [K_1(\gamma_1 \gamma R) K_1(\gamma_2 \gamma r) - K_1(\gamma_2 \gamma R) K_1(\gamma_1 \gamma r)] \Big| d\gamma, \quad (2.3)$$

$$u_z = \frac{Q}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(\gamma z)}{\gamma M(\gamma)} \left\{ \gamma [k_1(1+k_2) K_0(\gamma_1 \gamma r) K_0(\gamma_2 \gamma R) - k_2(1+k_1) K_0(\gamma_2 \gamma r) K_0(\gamma_1 \gamma R)] + \right. \\ \left. + \frac{A_{11} - A_{12}}{A_{44}R} [k_1 \gamma_2 K_0(\gamma_1 \gamma r) K_1(\gamma_2 \gamma R) - k_2 \gamma_1 K_0(\gamma_2 \gamma r) K_1(\gamma_1 \gamma R)] \right\} d\gamma, \quad (2.4)$$

$$\sigma_z = \frac{Q}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(\gamma z)}{M(\gamma)} \left\{ \gamma A_{44} (1+k_1)(1+k_2) [\gamma_2^2 K_0(\gamma_1 \gamma R) K_0(\gamma_2 \gamma r) - \gamma_1^2 K_0(\gamma_2 \gamma R) K_0(\gamma_1 \gamma r)] + \right. \\ \left. + \frac{A_{11} - A_{12}}{R} \gamma_1 \gamma_2 [(1+k_2) \gamma_2 K_0(\gamma_2 \gamma r) K_1(\gamma_1 \gamma R) - (1+k_1) \gamma_1 K_0(\gamma_1 \gamma r) K_1(\gamma_2 \gamma R)] \right\} d\gamma, \quad (2.5)$$

$$\sigma_r = \frac{Q}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(\gamma z)}{M(\gamma)} \left\{ \frac{A_{11} - A_{12}}{r} \gamma [(1+k_1)(1+k_2) K_1(\gamma_1 \gamma r) K_0(\gamma_2 \gamma R) - \gamma_2(1+k_1) K_1(\gamma_2 \gamma r) K_0(\gamma_1 \gamma R)] + \right. \\ \left. + k_1 K_1(\gamma_2 \gamma r) K_0(\gamma_1 \gamma R) \right\} + \frac{A_{11} - A_{12}}{A_{44}R} \gamma_1 \gamma_2 [K_1(\gamma_1 \gamma r) K_1(\gamma_2 \gamma R) - K_1(\gamma_2 \gamma r) K_1(\gamma_1 \gamma R)] \Big| + \\ + (1+k_1)(1+k_2) A_{44} \gamma^2 [K_0(\gamma_1 \gamma r) K_0(\gamma_2 \gamma R) - K_0(\gamma_2 \gamma r) K_0(\gamma_1 \gamma R)] + \\ + \frac{(A_{11} - A_{12}) \gamma}{R} [(1+k_1) \gamma_2 K_1(\gamma_2 \gamma R) K_0(\gamma_1 \gamma r) - (1+k_2) \gamma_1 K_1(\gamma_1 \gamma R) K_0(\gamma_2 \gamma r)] \Big| d\gamma. \quad (2.6)$$

$$\tau_{rz} = \frac{Q}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(\gamma z)}{M(\gamma)} \left\{ A_{44} \gamma (1+k_1)(1+k_2) [\gamma_2 K_1(\gamma_2 \gamma r) K_0(\gamma_1 \gamma R) - \gamma_1 K_1(\gamma_1 \gamma r) K_0(\gamma_2 \gamma R)] + \right. \\ \left. + \frac{A_{11} - A_{12}}{R} \gamma_1 \gamma_2 [(1+k_2) K_1(\gamma_2 \gamma r) K_1(\gamma_1 \gamma R) - (1+k_1) K_1(\gamma_1 \gamma r) K_1(\gamma_2 \gamma R)] \right\} d\gamma, \quad (2.7)$$

где использовано обозначение

$$M(\gamma) = A_{44} (1+k_1)(1+k_2) \gamma [\gamma_2 K_0(\gamma_1 \gamma R) K_1(\gamma_2 \gamma R) - \gamma_1 K_0(\gamma_2 \gamma R) K_1(\gamma_1 \gamma R)] + \\ + \frac{A_{11} - A_{12}}{R} \gamma_1 \gamma_2 (k_2 - k_1) K_1(\gamma_1 \gamma R) K_1(\gamma_2 \gamma R). \quad (2.8)$$

Из выражений (2.3) — (2.8), переходя к пределу при $i_i \rightarrow 1$ и $k_i \rightarrow 1$ ($i = 1, 2$), получим значения искомых величин перемещений и напряжений для соответствующей задачи для изотропного пространства.

Другие задачи для трансверсально-изотропной среды рассмотрены в работах (3-9).

Институт механики Академии наук
Армянской ССР

Գլանային խոռոչով առաձգական տրանսվերսալ-իզոտրոպ
տարածության համար երկու առանցքասիմետրիկ խնդիրներ

Դիտարկված են անվերջ երկարությամբ գլանային թուլացումով առաձգական, տրանսվերսալ-իզոտրոպ տարածության համար երկու առանցքասիմետրիկ խնդիրներ, երբ հանվածքի մակերևույթի վերջավոր մասում ազդում են իավասարաչափ բաշխված առանցքասիմետրիկ ուժեր (որոնք կիրառված են խոռոչի մակերևույթին ուղղահայաց կամ շոշափող՝ դուգաճև խոռոչի առանցքին)։

Ստացված են առաձգական միջավայրում տեղափոխությունների և լարումների որոշման համար արտահայտություններ։ Ստացված արտահայտություններից գտնված են փնտրվող մեծությունների համար համապատասխան արժեքներ այն դեպքում, երբ առաձգական տարածությունը իզոտրոպ է։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ H. A. Elliott, Proc. Cambr. Philos. Society, v. 41, part 4, p. 522—533 (1918).
² Г. Г. Лехницкий, Теория упругости анизотропного тела. М., 1977. ³ H. A. Elliott, Proc. Cambr. Philos. Society, v. 45, part 4, p. 621—631 (1949). ⁴ А. И. Баблюк, ДАН АрмССР, т. 32, № 4, с. 189—195 (1961). ⁵ А. А. Баблюк, Изв. АН-АрмССР. Серия ФМН, т. 14, № 4, с. 61—70 (1961). ⁶ Deutsche Bulletin Acad. Polon. Sci., ser. sci-techn., v. 11, № 9, p. 312—320 (1963). ⁷ Д. В. Грилицкий, Я. М. Кизыма, ИМ (журн. АН УкрССР), т. 10, вып. 3, с. 297—304 (1964). ⁸ Чен, Прикладная механика (Тр. Американского общества инженеров-механиков, рус. пер.), т. 33, № 2, с. 98—107 (1966). ⁹ A. Atsumi, H. Pachi, Intern. Journal Eng. Sci., v. 13, № 7-8, p. 675—685 (1975).