ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Том 90 1990 №5

УДК 517.547

МАТЕМАТИКА

Д. Т. Багдасарян, И. В. Оганисян

Граничные свойства функций $B_\alpha(z; z_k)$ М. М. Джрбашяна

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР В. С. Захаряном 26/III 1990)

На пути построения общей теории факторизации мероморфных в круге $D:\{z: |z|<1\}$ функций М. М. Джрбашян ([1]) конструктивно построил произведения $B_\alpha(z; z_k)$, зависящие от непрерывного параметра $\alpha \in (-1, \infty)$, сходимость которого имеет место только при условии

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{1+\alpha}<+\infty. \tag{1}$$

Эти произведения, переходящие к классической функции Бляшке $B(z)$ лишь при условии $\alpha=0$, строились таким образом:

$$B_\alpha(z; z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-W_\alpha(z; z_k)}, \tag{2}$$

где

$$W_\alpha(z; \zeta)=\omega_\alpha^{(1)}(z; \zeta)-\omega_\alpha^{(2)}(z; \zeta), \tag{3}$$

$$\omega_\alpha^{(1)}(z; \zeta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}(\bar{\zeta}z)^k\int_{|\zeta|}^{1}(1-x)^\alpha x^{-k-1}dx, \tag{4}$$

$$\omega_\alpha^{(2)}(z; \zeta)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^k\int_{0}^{|\zeta|}(1-x)^\alpha x^{k-1}dx. \tag{5}$$

Далее М. М. Джрбашян ([1]) путем эффективного применения аппарата операторов $D^{-\alpha}$ $(-1<\alpha<+\infty)$ дробного интегродифференцирования Римана—Лиувилля дал широкое обобщение класса N мероморфных функций в D Неванлинны: класс N_α $(-1<\alpha<+\infty)$, совпадающий с N при $\alpha=0$. Классы N_α обладают свойствами:

$$N_{\alpha_1}\subset N_{\alpha_2}\ (-1<\alpha_1<\alpha_2<+\infty), \quad B_\alpha(z; z_k)\in N_\alpha.$$

Как известно (см. ([2])), множество E, измеримое B, имеет положительную γ-емкость $(0<\gamma<1)$, если найдется такая $\mu \prec E$, т. е.

$$\int_E d\mu=1,$$

для которой функция

$$V_{\gamma}(x, r)=\int_{0}^{2\pi} \frac{du}{|e^{iu}-re^{ix}|^{\gamma}}$$

остается равномерно ограниченной по x при $r \to 1-0$.

Если же для любой меры $\mu \prec E$ имеет место

$$V_{\gamma}(\mu)=\sup_{0<r<1} \{\max_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} V_{\gamma}(x, r)\}=+\infty,$$

то E имеет γ-емкость, равную нулю, и тогда будем писать

$$\mathrm{cap}_{\gamma} E=0.$$

Известно, что если $\mathrm{cap}_{\gamma}\, E_k=0$ $(k=1, 2, \ldots, p)$, то имеем также

$$\mathrm{cap}_{\gamma}\left\{\bigcup_{1}^{p} E_k\right\}=\mathrm{cap}_{\gamma}\left\{\bigcap_{1}^{p} E_k\right\}=0.$$

В совместной работе М. М. Джрбашяна и В. С. Захаряна ([3], теорема 2, при $\omega(x)=(1-x)^{\alpha}$) была установлена следующая

Теорема А. *Если* $F(z)\in N_{\alpha}$ $(-1<\alpha<0)$, *то предел*

$$F(e^{i\theta})=\lim_{r\to 1-0} F(re^{i\theta}) \tag{6}$$

существует для любого $\theta\in[0, 2\pi]$, *кроме, быть может, некоторого множества* $E\subset[0, 2\pi]$, $(1+\alpha)$-*емкость которого равна нулю.*

В работе ([4]) доказывается неулучшаемость теоремы А.

Цель нашей работы исследовать граничные свойства произведений $B_{\alpha}(z; z_k)$ М. М. Джрбашяна для положительных α, если нули $\{z_k\}$ удовлетворяют более сильному условию, чем (1). В частности, теорема А распространяется и на случай $0<\alpha<1$.

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Если*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|)^{\alpha}<+\infty, \quad 0<\alpha<\infty, \tag{7}$$

то имеет место представление

$$B_{\alpha}(z; z_k)=B_{\alpha-1}(z; z_k)\exp \sum_{k=1}^{\infty}\left\{2\int_{|z_k|}^{1} \frac{(1-x)^{\alpha-1}}{\left(1-\frac{\bar{z}_k}{x} z\right)^{\alpha}}dx-\frac{(1-|z_k|)^{\alpha}}{\alpha}\right\}. \tag{8}$$

Доказательство. Из (4) имеем

$$\omega_{\alpha}^{(1)}(z; \zeta)-\omega_{\alpha-1}^{(1)}(z; \zeta)=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+k)}(\bar{\zeta}z)^{k}\left\{\frac{\alpha+k}{\alpha}\int_{|\zeta|}^{1} (1-x)^{\alpha}x^{-k-1}dx-\right.$$

$$\left.-\int_{|\zeta|}^{1} (1-x)^{\alpha-1}x^{-k-1}dx\right\}. \tag{9}$$

С помощью интегрирования по частям получаем

$$\frac{\alpha+k}{\alpha}\int_{|\zeta|}^{1}(1-x)^{\alpha}x^{-k-1}dx-\int_{|\zeta|}^{1}(1-x)^{\alpha-1}x^{-k-1}dx=\int_{|\zeta|}^{1}(1-x)^{\alpha}x^{-k-1}dx-$$

$$-\int_{|\zeta|}^{1}(1-x)^{\alpha-1}x^{-k-1}dx+\frac{k}{\alpha}\int_{|\zeta|}^{1}(1-x)^{\alpha}x^{-k-1}dx=-\int_{|\zeta|}^{1}(1-x)^{\alpha-1}x^{-k}dx-$$

$$-\frac{1}{\alpha}\int_{|\zeta|}^{1}(1-x)^{\alpha}dx^{-k}=-2\int_{|\zeta|}^{1}(1-x)^{\alpha-1}x^{-k}dx+\frac{1}{\alpha}\frac{(1-|\zeta|)^{\alpha}}{|\zeta|^{k}}. \tag{10}$$

Следовательно, из (9) получаем

$$\omega_{\alpha}^{(1)}(z;\zeta)-\omega_{\alpha-1}^{(1)}(z;\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+k)}\frac{(1-|\zeta|)^{\alpha}}{\alpha}\left(\frac{\bar{\zeta}z}{|\zeta|}\right)^{k}-$$

$$-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+k)}(\bar{\zeta}z)^{k}\int_{|\zeta|}^{1}(1-x)^{\alpha-1}x^{-k}dx.$$

Но так как

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+k)}z^{k}=\frac{1}{(1-z)^{\alpha}},\quad |z|<1, \tag{11}$$

то получаем

$$\omega_{\alpha}^{(1)}(z;\zeta)-\omega_{\alpha-1}^{(1)}(z;\zeta)=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1-|\zeta|}{1-\frac{\bar{\zeta}z}{|\zeta|}}\right)^{\alpha}-2\int_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha-1}}{\left(1-\frac{\bar{\zeta}z}{x}\right)^{\alpha}}dx. \tag{12}$$

Аналогично из (5) получаем

$$\omega_{\alpha}^{(2)}(z;\zeta)-\omega_{\alpha-1}^{(2)}(z;\zeta)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+k)}\left|\frac{\alpha+k}{\alpha}\int_{0}^{|\zeta|}(1-x)^{\alpha}x^{k-1}dx-\right.$$

$$\left.-\int_{0}^{|\zeta|}(1-x)^{\alpha-1}x^{k-1}dx\right|=\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+k)}(1-|\zeta|)^{\alpha}\left(\frac{|\zeta|z}{\zeta}\right)^{k}.$$

Откуда из (11) и (3) находим

$$\omega_{\alpha}^{(2)}(z;\zeta)-\omega_{\alpha-1}^{(2)}(z;\zeta)=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1-|\zeta|}{1-\frac{\bar{\zeta}z}{|\zeta|}}\right)^{\alpha}-\frac{(1-|\zeta|)^{\alpha}}{\alpha}, \tag{13}$$

$$W_{\alpha}(z;\zeta)=W_{\alpha-1}(z;\zeta)+\frac{(1-|\zeta|)^{\alpha}}{\alpha}-2\int_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha-1}}{\left(1-\frac{\bar{\zeta}z}{x}\right)^{\alpha}}dx. \tag{14}$$

Так как из условия (7) следует и условие (1), то из (14) получаем доказательство леммы.

Применяя несколько раз формулы (8), получаем следующее.

Теорема 1. *Пусть $\alpha>0$, $\alpha=n+\beta$, где $0<\beta\leqslant 1$, n—целое число, тогда, если*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{\alpha}<+\infty, \tag{15}$$

то имеет место представление

$$B_{\alpha}(z;z_k)=B_{\beta-1}(z;z_k)\exp\sum_{k=1}^{\infty}\left\{2\int\limits_{|z_k|}^{1}\left[\frac{(1-x)^{\alpha-1}}{\left(1-\frac{\bar{z}_k z}{x}\right)^{\alpha}}+\ldots+\frac{(1-x)^{\beta-1}}{\left(1-\frac{\bar{z}_k z}{x}\right)^{\beta}}\right]dx-\right.$$

$$\left.-\left[\frac{(1-|z_k|)^{\alpha}}{\alpha}+\ldots+\frac{(1-|z_k|)^{\beta}}{\beta}\right]\right\}. \tag{16}$$

В частном случае, так как при условии (15) $B_{\beta-1}(z;z_k)\in$ [illegible], то

$$B_{\alpha}(z;z_k)=B_{0}(z;z_k)\exp\sum_{k=1}^{\infty}\left\{2\int\limits_{|z_k|}^{1}\left[\frac{(1-x)^{\alpha-1}}{\left(1-\frac{\bar{z}_k z}{x}\right)^{\alpha}}+\ldots+\frac{(1-x)^{\beta-1}}{\left(1-\frac{\bar{z}_k z}{x}\right)^{\beta}}\right]dx-\right.$$

$$\left.-\left[\frac{(1-|z_k|)^{\alpha}}{\alpha}+\ldots+\frac{(1-|z_k|)^{\beta}}{\beta}\right]-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,d\psi(\theta)\right\}, \tag{17}$$

где $B_0(z;z_k)$—функция Бляшке, $\psi(\theta)$ —действительная функция с конечным полным изменением на $[0, 2\pi]$.

Если $\alpha=n$, то условие (7) заменяется более слабым условием и мы получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Если нули функции $B_n(z;z_k)$ удовлетворяют условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)<+\infty, \tag{18}$$

то имеет место представление

$$B_n(z;z_k)=B(z)\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}2\int\limits_{|z_k|}^{1}\left[\frac{(1-x)^{n-1}}{\left(1-\frac{\bar{z}_k z}{x}\right)^{n}}+\ldots+\frac{1}{1-\frac{\bar{z}_k z}{x}}\right]dx-\right.$$

$$\left.-\left[\frac{(1-|z_k|)^{n}}{n}+\ldots+\frac{1-|z_k|}{1}\right]\right\}. \tag{19}$$

Из леммы 1 получаем следующие граничные свойства функции $B_{\alpha}(z;z_k)$ $(\alpha>0)$ М. М. Джрбашяна.

Теорема 3 *Пусть $\{z_k\}_1^{\infty}$ удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{\alpha}<+\infty. \tag{20}$$

тогда, если

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{|z_k|}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha-1}}{\left|1-\frac{\bar{z}_k}{x}e^{i\varphi}\right|^{\alpha}}dx<+\infty, \tag{21}$$

то в точке $e^{i\varphi}$ *функции* $B_{\alpha-1}(z;z_k)$ *и* $B_{\alpha}(z,z_k)$ *одновременно имеют или не имеют радиального предела* (6).

Доказательство. Имеем

$$\left|1-\frac{\bar{z}_k}{x}re^{i\theta}\right|\geq 1-r,\quad \left|1-\frac{\bar{z}_k}{x}re^{i\theta}\right|\geq\left|1-\frac{\bar{z}_k}{x}e^{i\theta}\right|-$$

$$-\left|\frac{\bar{z}_k}{x}\right|(1-r)\geq\left|1-\frac{\bar{z}_k}{x}e^{i\theta}\right|-(1-r).$$

Складывая эти неравенства, находим

$$\left|1-\frac{\bar{z}_k}{x}re^{i\theta}\right|\geq\frac{1}{2}\left|1-\frac{\bar{z}_k}{x}e^{i\theta}\right|. \tag{22}$$

откуда вытекает, что вместе с (21) абсолютно и равномерно сходится и следующий ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{|z_k|}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha-1}}{\left(1-\frac{\bar{z}_k}{x}re^{i\theta}\right)^{\alpha}}dx,\quad 0\leq r\leq 1.$$

Следовательно, существует предел

$$\lim_{r\to 1-0}\sum_{k=1}^{\infty}2\int_{|z_k|}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha-1}}{\left(1-\frac{\bar{z}_k}{x}re^{i\theta}\right)^{\alpha}}dx. \tag{23}$$

Теорема 4. *Пусть нули* $\{z_k\}_1^{\infty}$ *функции* $B_{\alpha}(z;z_k)$, $0<\alpha<1$, *удовлетворяют вместо* (1) *более сильному условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{\alpha}<+\infty, \tag{24}$$

тогда радиальный предел

$$\lim_{r\to 1-0}B_{\alpha}(re^{i\theta};z_k)=B_{\alpha}(e^{i\theta};z_k)$$

существует для всех $\theta\in[0,2\pi]$, *кроме, быть может, некоторого множества* $E\subset[0,2\pi]$, *для которого* $\mathrm{cap}_{\alpha}E=0$.

Доказательство. Согласно теореме 3 достаточно показать, что условие (21) имеет место для всех $\theta\in[0,2\pi]$, кроме, быть может, некоторого множества E, для которого $\mathrm{cap}_{\alpha}E=0$.

Вопреки утверждению, предположим, что ряд (21) расходится на множестве $E\subset[0,2\pi]$, $\mathrm{cap}_{\alpha}E>0$. Тогда найдется мера $\mu\prec E$, $\mu(E)=1$, для которой

$$\int_{E}\frac{d\mu(\theta)}{|1-z_ke^{-i\theta}|^{\alpha}}\leq C_0<+\infty, \tag{25}$$

где $C_0>0$ постоянная, не зависящая от z_k.

Так как имеем

$$\left|1-\frac{\bar z_k}{x}e^{i\theta}\right| = \left|1-\bar z_k e^{i\theta}+\bar z_k e^{i\theta}-\frac{\bar z_k}{x}e^{i\theta}\right| =$$

$$=|1-\bar z_k e^{i\theta}|\left|1-\frac{\bar z_k e^{i\theta}(1-x)}{x(1-\bar z_k e^{i\theta})}\right| \geqslant |1-z_k e^{-i\theta}|\frac{x-|z_k|}{x(1-|z_k|)},$$

то получаем

$$\int\limits_{|z_k|}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha-1}}{\left|1-\frac{\bar z_k}{x}e^{i\theta}\right|^{\alpha}}dx \leqslant \frac{(1-|z_k|)^{\alpha}}{|1-z_k e^{-i\theta}|^{\alpha}}\int\limits_{|z_k|}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha-1}}{(x-|z_k|)^{\alpha}}dx. \tag{26}$$

Но при $0<\alpha<1$

$$\int\limits_{|z_k|}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha-1}}{(x-|z_k|)^{\alpha}}dx = \int\limits_{|z_k|}^{\frac{1+|z_k|}{2}}\frac{dx}{(1-x)^{1-\alpha}(x-|z_k|)^{\alpha}} + \int\limits_{\frac{1+|z_k|}{2}}^{1}\frac{dx}{(1-x)^{1-\alpha}(x-|z_k|)^{\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{1-\alpha}}{(1-|z_k|)^{1-\alpha}}\int\limits_{|z_k|}^{\frac{1+|z_k|}{2}}\frac{dx}{(x-|z_k|)^{\alpha}} + \frac{2^{\alpha}}{(1-|z_k|)^{\alpha}}\int\limits_{\frac{1+|z_k|}{2}}^{1}\frac{dx}{(1-x)^{1-\alpha}} \leqslant \mathrm{const}=C_1.$$

Отсюда и из (26) получаем

$$\int\limits_{|z_k|}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha-1}}{\left|1-\frac{\bar z_k}{x}e^{i\theta}\right|^{\alpha}}dx \leqslant C_1\frac{(1-|z_k|)^{\alpha}}{|1-z_k e^{-i\theta}|^{\alpha}}. \tag{27}$$

Из (25) и (27) следует, что

$$\int\limits_{E}\left\{\sum_{k=1}\int\limits_{|z_k|}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha-1}}{\left|1-\frac{\bar z_k}{x}e^{i\theta}\right|^{\alpha}}dx\right\}d\mu \leqslant C_1\int\limits_{E}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-|z_k|)^{\alpha}}{|1-z_k e^{-i\theta}|^{\alpha}}\right\}d\mu \leqslant$$

$$\leqslant C_1\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{\alpha}\int\limits_{E}\frac{d\mu}{|1-z_k e^{-i\theta}|^{\alpha}} \leqslant C_0C_1\sum_{k=1}(1-|z_k|)^{\alpha}<\mathrm{const},$$

что противоречит нашему допущению о том, что на множестве E ряд (21) расходится. Отсюда, по теореме 3 и теореме A, получается доказательство теоремы.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Գ. Թ. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ, Ի. Վ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

Մ. Մ. Ջրբաշյանի $B_\alpha(z;z_k)$ արտադրյալների եզրային հատկությունների մասին

Միավոր շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաների դասերին նվիրված աշխատանքներից է Մ. Մ. Ջրբաշյանի կողմից սահմանված $N_\alpha(-1<\alpha<\infty)$ դասը, որը հանդիսանում է Ռ. Նևանլինայի $N=N_0$ դասի բնական ընդհանրացումը։

Հայտնի է նաև, որ $N_\alpha\subset N_0$, երբ $-1<\alpha<0$ և $N_0\subset N_\alpha$, երբ $0<\alpha<\infty$.

Ջրբաշյանի $B_\alpha(z;z_k)$ արտադրյալները հանդիսանում են N_α դասերի զրոների և բևեռների կրողները, որոնք, մասնավորապես $\alpha=0$ դեպքում համընկնում են Բլյաշկեի $B(z)$ ֆունկցիաների հետ։

Պարամետրի $-1<\alpha\leq 0$ արժեքների համար N_α դասերի եզրային հատկությունները ուսումնասիրված են Մ. Մ. Ջրբաշյանի և Վ. Ս. Զաքարյանի կողմից։ Ներկա աշխատանքում ստացված են եզրային հատկություններ $B_\alpha(z;z_k)$ արտադրյալների համար, երբ $0<\alpha<+\infty$։ Մասնավորապես ապացուցված է հետևյալը։

Թեորեմ. Թող $B_\alpha(z;z_k)$ արտադրյալների $\{z_k\}$, զրոները բավարարում են հետևյալ պայմանին՝

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{\alpha}<+\infty,\quad 0<\alpha<1,$$

ապա՝

$$\lim_{r\to1-0} B_\alpha(re^{i\theta};z_k)=B_\alpha(e^{i\theta};z_k)$$

շառավղային սահմանները գոյություն ունեն բոլոր $\theta\in[0,2\pi]$ համար, բացի զուցե մի բազմության, որի α ունակությունը հավասար է զրոյի։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян*, Интегральные преобразования и представление функций в комплексной области, Наука, М., 1966. [2] *Н. К. Бари*, Тригонометрические ряды, Физматгиз, М., 1961. [3] *М. М. Джрбашян, В. С. Захарян*, Изв. АН СССР, Сер. мат. т. 34 (1970). [4] *В. С. Захарян, С. В. Мадоян*, ДАН АрмССР, т. 79, № 1, с. 7—9 (1984).