ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Том 90 1990 №5

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

С. Г. Инджеян, Ж. Г. Никогосян

Об «игре в камни» на графе алгоритма БПФ

(Представлено академиком АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 16/II 1990)

«Игра в камни» введена в работе [1] и изучена рядом авторов в работах [2-4].

«Игра в камни» определяется для бесконтурного орграфа и включает следующие правила:

1) камень можно поставить на любую входную вершину (вершина, где не входит ни одна дуга) в любое время;

2) камень можно удалить из вершины в любое время;

3) камень можно поставить на любую вершину (не входную) только тогда, когда все вершины, от которых идут дуги в данную вершину, в данный момент имеют камни;

4) «игра в камни» завершается тогда, когда любая выходная вершина в некоторый момент получила камень.

Заметим, что в момент завершения игры наличие камней на всех выходных вершинах не обязательно.

Очевидно, что «игру в камни» на графе G можно реализовать различными способами. Пусть P—некоторая стратегия (алгоритм) «игры в камни» на графе G. Шагом в стратегии P назовем операцию размещения камня на некоторую вершину. Будем считать, что t-й момент алгоритма определяет его t-й шаг. Число всех шагов стратегии P выражает время реализации стратегии P на графе G и обозначается через $T(P, G)$. Обозначим через $S(P, G, t)$ число камней, имеющееся на вершинах графа G на t-ом шаге.

Пусть

$$S(P, G) = \max_t S(P, G, t).$$

Число $S(P, G)$ выражает максимальный объем использованной внутренней памяти в ходе стратегии P на графе G. Обозначим

$$T(S) = \min_P T(P, G),$$

где минимум берется по всевозможным стратегиям P, для которых $S(P, G) \leq S$. Другими словами $T(S)$—минимальное время реализации „игры в камни“ с помощью S камней. Алгоритм A, реализующий „игру в камни“ на G, с помощью S камней назовем оптимальным, если $T(A, G) = T(S)$. В работах [3,4] найдены оценки для $T(S)$. В настоящей работе мы приведем точную формулу для $T(S)$.

Пусть G—ориентированный граф с множеством вершин V и множеством упорядоченных пар (дуг) $E\subseteq V\times V$.

Путь — это чередующаяся последовательность $v_0x_1v_1x_2 \dots x_mv_m$ различных вершин $v_0, v_1, \dots, v_m$ и дуг $x_1, x_2, \dots, x_m$, в которой каждая дуга x_i есть $v_{i-1}v_i$ и обозначается через $v_0v_1 \dots v_m$. Полупуть это опять-таки чередующаяся последовательность $v_0x_1v_1x_2 \dots x_mv_m$ вершин и дуг, но дугой $x_i (1\leqslant i\leqslant m)$ может быть как $v_{i-1}v_i$, так и v_iv_{i-1}. Если $v_0=v_m$, то путь (полупуть) $v_0v_1 \dots v_m$ называется контуром (полуконтуром). Длина пути (или контура) есть число его дуг и обозначается через $|P|$. Подграф, порожденный подмножеством вершин $V_0\subseteq V$ имеет множество вершин V_0 и множество ребер $E_0=\{v_iv_j|v_iv_j\in E\&v_i,v_j\in V_0\}$ и обозначается через $<V_0>$. Через $\rho^+(v)(\rho^-(v))$ обозначим число дуг, входящих (выходящих) в вершину v.

$G=(V, E)$ называется обыкновенным графом или просто графом, если E состоит из неупорядоченных пар из $V\times V$. Для графа аналоги понятий путь и контур известны под названием цепь и цикл соответственно. Если существует путь из вершины u в вершину v, то будем говорить, что v достижима из u.

Источником в орграфе G называется вершина, из которой можно достичь все другие вершины орграфа.

Сток—вершина, которой можно достичь из любой вершины орграфа.

Выходящее (входящее) дерево—это орграф с источником (стоком), не имеющий полуконтуров. Множество вершин, имеющих одинаковое расстояние от стока (истока), составляет слой входящего (выходящего) дерева.

Пусть имеем входящее дерево с $d+1$ (где $d\geqslant 1$) слоями. k-й слой ($k\geqslant 0$)—это слой, расстояние всех вершин которого от стока равно $d-k$. Очевидно, сток составляет d-й слой входящего дерева.

Входящее дерево с $d+1$ слоями называется полным ориентированным бинарным деревом, если для любой вершины v из k-го слоя $(1\leqslant k\leqslant d)\rho^+(v)=2$ и $\rho^-(v)=1$, а для нулевого слоя $\rho^+(v)=0$ и $\rho^-(v)=1$.

Пусть $n=2^d$, $d\geqslant 0$. Под графом $F^{(d)}=(V^{(d)}, D^{(d)}, E^{(d)})$ алгоритма быстрого преобразования Фурье на последовательности длины n подразумевается граф, имеющий множество вершин $V^{(d)}$, множество дуг $E^{(d)}\subseteq V^{(d)}\times V^{(d)}$, множество выходов $D^{(d)}\subseteq V^{(d)}$, и определяется рекурсивно с помощью двух непересекающихся по вершинам графов БПФ

$$ {}_0F^{(d-1)}=({}_0V^{(d-1)}, {}_0D^{(d-1)}, E^{(d-1)}), \ {}_1F^{(d-1)}=({}_1V^{(d-1)}, {}_1D^{(d-1)}, {}_1E^{(d-1)}) $$

следующим образом.

Пусть $D^{(d)}=\{v_0^{(d)}, v_1^{(d)}, \dots v_{2^d-1}^{(d)}\}$—множество вершин, отличных от ${}_0V^{(d-1)}$ и ${}_1V^{(d-1)}$. Тогда

$$ V^{(d)}={}_0V^{(d-1)}\cup{}_1V^{(d-1)}\cup D^{(d)}, $$
$$ E^{(d)}={}_0E^{(d-1)}\cup{}_1E^{(d-1)}\cup\Delta^{(d)}, $$

где

$$\Delta^{(d)}=\bigcup_{i=0}^{2^{d-1}-1}\delta_i^{(d)},$$

$$\delta_i^{(d)}=\{({}_0v_i^{(d-1)}, {}_0v_i^{(d)}),\ ({}_1v_i^{(d-1)}, v_i^{(d)}),\ ({}_0v_i^{(d-1)}, v_{i+2^{d-1}}^{(d)}),\ ({}_1v_i^{(d-1)}, v_{i+2^{d-1}}^{(d)})\},$$

а $F^{(0)}=(V^{(0)}, V^{(0)}\varnothing)$, где $V^{(0)}=\{v_0\}$ и $\varnothing$—пустое множество. Все ориентированные пути графа $F^{(d)}$, идущие от входных вершин к некоторой вершине v, порождают полное ориентированное бинарное дерево $H(v)$ со стоком v.

Выходные вершины графа $F^{(d)}$ составляют d-й слой графа $F^{(d)}$. Если i-й слой графа $F^{(d)}$ определен, то $(i-1)$ й слой определим как множество всех вершин, от которых идут дуги к вершинам i-го слоя. Для любых двух выходных вершин x, y через $l(x, y)$ обозначим номер последнего слоя (начиная с нулевого), где пересекаются $H(x)$ и $H(y)$.

Очевидно, существует последовательность $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ элементов множества $D^{(d)}$, которая имеет следующую структуру:

а) $Z_j^{(d-i)}=Z_{2j-1}^{(d-i+1)}\cup Z_{2j}^{(d-i+1)}$, $i=\overline{1, d}$, $j=\overline{1, 2^{d-i}}$,

где

(•) $Z_1^{(d)}=\{z_0\}, \ldots, Z_n^{(d)}=\{z_{n-1}\}$, $Z^{(0)}=\{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\}=Z$;

б) для любых вершин $u_1\in Z_{2j-1}^{(d-i+1)}$, $u_2\in Z_{2j}^{(d-i+1)}$, $w\in Z_j^{(d-i)}$ имеет место $l(u_1, u_2)=d-i+1$, $l(u_1, w)=l(u_2, w)$.

Определим граф $G=(Z, E)$, где $Z=\{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\}$, а $E=\{z_iz_j/i, j\in\overline{0, n-1}, i\neq j\}$, причем каждому ребру z_iz_j присваивается вес $\varphi(z_i, z_j)=2^{r(i,j)}$, где $r(i, j)=l(z_iz_j)$.

Вес цепи $P'=v_1v_2\ldots v_t$ графа G есть сумма

$$\varphi(P')=\sum_{i=1}^{t-1}\varphi(v_iv_{i+1}).$$

В работе ([2]) доказано, что для графа $F^{(d)}$ справедливо неравенство

$$T(S)\leqslant\begin{cases}\dfrac{2n^2}{2^j}+(j-1)n, & S\geqslant d+2^j-j,\ 1\leqslant j\leqslant d-1,\\ n(1+\log_2 n), & S\geqslant 2^d+1,\end{cases}$$

где $n=2^d$.

В той же работе доказано, что

$$T(d+1)\geqslant\frac{1}{2}n(n-d)+n-1.$$

В настоящей работе нами доказывается

Теорема. *Для графа $F^{(d)}$ с $n=2^d$ входами имеет место*

$$T(d+1)=\begin{cases}\dfrac{(2n+1)(n+1)}{3} & \text{для } d=1 \text{ и } d\geqslant 3,\\ 16 & \text{для } d=2\end{cases}$$

Доказательство этой теоремы основывается на следующих двух леммах.

Лемма 1. *Для графа $G=(Z, E)$*

$$\max_{P\subset G}\varphi(P)=\sum_{i=0}^{d-1}4^i.$$

где P—гамильтоновая цепь графа G.

Для формулировки второй леммы нам понадобится следующее

Определение. *Скажем, что полное бинарное дерево H с $k\geqslant 2$ слоями имеет L-расположение камней, если существует путь $L^*=u_1u_2\ldots u_{k-1}$ (где u_{k-1}—сток H, а u_i $(1\leqslant i\leqslant k-2)$—вершина i-го слоя) такой, что все вершины, находящиеся на расстоянии 1 от L^*, имеют камни.*

Лемма 2. *Пусть H—полное бинарное дерево с $k\geqslant 2$ слоями и пусть P—любая стратегия „игры в камни" на H, для которой $S(P, H)=k$. Тогда на некотором шаге t^* алгоритма P на дереве H существует L-расположение камней.*

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР
Ереванского государственного университета

Ս. Գ. ԻՆՋԵՅԱՆ, Ժ. Գ. ՆԻԿՈՂՈՍՅԱՆ

ՖԱՁ-ի ալգորիթմի գրաֆի վրա «սալաքարերի խաղի» մասին

«Սալաքարերի խաղը» սահմանվում է ացիկլիկ կողմնորոշված գրաֆների համար և ունի հետևյալ կանոնները.

1) կամայական պահի քարը կարելի է դնել կամայական մուտքային գագաթի վրա (գագաթ, որտեղ չի մտնում ոչ մի աղեղ);

2) կամայական պահի քարը կարելի է հեռացնել գագաթից;

3) կամայական ոչ մուտքային գագաթի վրա քարը կարելի է դնել միայն այն դեպքում, և և այդ պահին տվյալ գագաթին անմիջապես նախորդող բոլոր գագաթները (գագաթներ, որոնցից գնում են աղեղներ տվյալ գագաթին) դրված են քարեր;

4) «սալաքարերի խաղը» համարվում է ավարտված, եթե բոլոր ելքային գագաթները խաղի ընթացքում ստացել են քար։

Խաղի քայլ ասելով կհասկանանք գագաթում քար դնելու գործողությունը։ $T(S)$-ով կնշանակենք քայլերի մինիմալ քանակը, որն անհրաժեշտ է ավարտելու համար «սալաքարերի խաղը» տված գրաֆի վրա S քարերի առկայության դեպքում։

Աշխատանքում ապացուցվում է՝

Թեորեմ. $n=2^d$ մուտքերով ՖԱՁ-ի ալգորիթմի գրաֆի համար տեղի ունի

$$T(d+1)=\begin{cases}\dfrac{(2n+1)(n-1)}{3} & \text{եթե } d=1 \text{ կամ } d\geqslant 3\\ 16 & \text{եթե } d=2\text{:}\end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *M. S. Paterson, C. E. Hewitt*, „Comparative schematology", Concurrent Systems and parallel Computation, Woods Hole, MA, p. 119–127, June 2–5, 1970. [2] *J. Hopcroft, W. Paul, L. Valiant*, J. of the Assoc. for Comp. Machinary, v. 24, №2, p. 332–337 (1977). [3] *J. E. Savage, S. Swamy*, IEEE Transactions of Information Theory, v. IT-24, №5, p. 564–568 (1978). [4] *N. Pippenger*, J. of the Assoc. for Comp. Machinery, v. 25, №3, p. 500–515 (1978). [5] *M. Tompa*, J. of Comp. and Syst. Sciences, v. 20, p. 118–132 (1980).