

ЗДК 539.3

МЕХАНИКА

В. В. Гнуни

**Проектирование оптимальных цилиндрических оболочек
из композиционных материалов, нагруженных осевой силой,
при ограничениях на прочность и частоты
собственных колебаний**

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР В. С. Саркисяном 20/II 1990)

В работе приводятся постановка и решение задачи проектирования нагруженной силой P цилиндрической оболочки из композиционных материалов, работающей в режиме собственных колебаний.

1. Для частот собственных колебаний цилиндрической оболочки средней длины l , радиуса R , толщины h , изготовленной из монослоев ортотропного композиционного материала (КМ), уложенных попеременно под углами $\pm\varphi$ к образующей и нагруженной силой P , имеется следующая формула (1-4):

$$\Omega_{mn} = \omega_{mn} \left(1 - \frac{P}{P_{mn}^*} \right)^{1/2} \quad (1.1)$$

Здесь m — число полуволн по образующей, n — число волн в окружном направлении шарнирно опертой по торцам оболочки

$$\omega_{mn} = \left(\frac{K_{mn}}{l^4} \right)^{1/2}, \quad P_{mn}^* = \frac{\Omega_{mn}^2 R K_{mn}}{l_{in}^2} \quad (1.2)$$

соответственно частота собственных свободных колебаний и собственные значения задачи устойчивости сжатой силой P цилиндрической оболочки

$$K_{mn} = \frac{h^3}{12} \left[B_{11} l_{in}^4 + B_{33} l_{in}^2 + B_{22} l_{in}^4 + \frac{12}{R^2 h^2} \frac{(B_{11} B_{22} - B_{12}^2) l_{in}^4}{B_{11} l_{in}^4 + B_{33} l_{in}^2 + B_{22} l_{in}^4} \right] \quad (1.3)$$

$$l_{in} = \frac{m\pi}{l}, \quad l_{in} = \frac{n}{R},$$

$$B_{33} = 2(B_{12} + 2B_{66}), \quad B_{11} = \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{R_{66}} - 2B_{12}$$

B_{ik} — характеристики упругости монослоя в главных геометрических направлениях оболочки.

Из (1.1) при заданных $\Omega_{mn} = \Omega$ и толщине оболочки h для расчетного значения силы P получается

$$\bar{P}(m, n, \varphi) = \frac{1}{m^2} (\bar{K}_{mn} - \bar{h} \bar{\Omega}^2), \quad (1.4)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{10^6 P}{2\pi R^2 B_{11}^0}, \quad \bar{\Omega}^2 = \frac{10^4 l^2}{\pi^2 l_{11}^0} \Omega^2, \\ \bar{K}_{mn} &= \frac{h^3}{12} \left(\frac{\pi R}{l} \right)^2 \left[\bar{B}_{11} m^4 + \bar{B}_3 m^2 n^2 + \bar{B}_{22} n^4 + \right. \\ &+ \left. \frac{12 \cdot 10^4}{h^2} \left(\frac{l}{\pi R} \right)^4 \frac{(\bar{B}_{11} \bar{B}_{22} - \bar{B}_{12}^2) m^4}{\bar{B}_{11} m^4 + \bar{B}_3 m^2 n^2 + \bar{B}_{22} n^4} \right] \\ \bar{B}_{ik} &= \frac{B_{ik}}{B_{11}^0}, \quad \bar{n} = \frac{n l}{\pi R}, \quad \bar{h} = 100 \frac{h}{R}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Для практических целей представляет интерес нахождение

$$\bar{P}_g(\varphi, \bar{h}, \bar{\Omega}) = \min_{m, n} \bar{P}(m, n, \varphi, \bar{h}, \bar{\Omega}), \quad (1.6)$$

причем при $\bar{\Omega} = 0$ получается, что $\bar{P}_g = \bar{P}_{кр}$, где $\bar{P}_{кр}$ — критическое значение силы $\bar{P}$.

Необходимо отметить, что из соотношения (1.4) можно определить $\bar{h}(m, n, \varphi)$ при заданных $\bar{P}$ и $\bar{\Omega}$. В этом случае для определения $\bar{h}_{mn}$ получается следующее кубическое уравнение:

$$\bar{h} - A_{mn} \bar{h} - F_{mn} = 0, \quad (1.7)$$

где

$$A_{mn} = \frac{12R}{\pi^2 l} \frac{\bar{\Omega}^2 - \frac{10^4 l^2}{\pi^2 R^2} \frac{(\bar{B}_{11} \bar{B}_{22} - \bar{B}_{12}^2) m^4}{\bar{B}_{11} m^4 + \bar{B}_3 m^2 n^2 + \bar{B}_{22} n^4}}{\bar{B}_{11} m^4 + \bar{B}_3 m^2 n^2 + \bar{B}_{22} n^4}, \quad (1.8)$$

$$F_{mn} = \frac{12R}{\pi^2 l} m^2 \frac{\bar{P}}{\bar{B}_{11} m^4 + \bar{B}_3 m^2 n^2 + \bar{B}_{22} n^4}.$$

Естественно, нахождение толщины пластинки

$$\bar{h}_g(\varphi, \bar{P}, \bar{\Omega}) = \max_{m, n} \bar{h}(m, n, \varphi, \bar{P}, \bar{\Omega}), \quad (1.9)$$

при которой первая частота собственных колебаний равна $\bar{\Omega}$ для заданных $\bar{P}$ и φ .

Задачи (1.6) и (1.9) являются двойственными, и решение одной из них обеспечивает решение другой.

2. Ограничение на прочность в настоящей работе обеспечивается условием (6)

$$\frac{\sigma_{11}^2}{\sigma_{B1}^2} + \frac{\sigma_{22}^2}{\sigma_{B2}^2} - \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{\sigma_{B1}^2} + \frac{\sigma_{12}^2}{\tau_{B0}^2} \leq 1, \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -\frac{P}{2\pi R h} (\cos^2 \varphi + L \sin 2\varphi), \\ \sigma_{22} &= -\frac{P}{2\pi R h} (\sin^2 \varphi - L \sin 2\varphi), \\ \sigma_{12} &= -\frac{P}{2\pi R h} \left(\frac{1}{2} \sin 2\varphi - L \cos 2\varphi \right) - \end{aligned} \quad (2.2)$$

напряжения в главных физических направлениях ортотропного монослоя КМ, σ_{B1} , σ_{B2} , τ_{B0} — допускаемые напряжения,

$$L = \frac{B_{16}B_{22} - B_{26}B_{12}}{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}.$$

Для алгоритма решения задачи не существен вид условия. При необходимости можно использовать другие, более сложные условия прочности.

Из условия прочности (2.1) при напряжениях (2.2) для расчетной толщины оболочки получается

$$\begin{aligned} \bar{h}_{np}(\varphi, \bar{P}) &= \frac{B_{11}^0 \bar{P}}{10^4 \sigma_{B1}} \left| (\cos^2 \varphi + L \sin 2\varphi)(\cos 2\varphi + 2L \sin 2\varphi) + \right. \\ &\left. + \frac{\sigma_{B1}^2}{\sigma_{B2}^2} (\sin^2 \varphi - L \sin 2\varphi)^2 + \frac{\sigma_{B1}^2}{\tau_{B0}^2} \left(\frac{1}{2} \sin 2\varphi - L \cos 2\varphi \right)^2 \right|. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Для каждого φ при заданных $\bar{h}$ и $\bar{\Omega}$ расчетное значение сжимающей силы $\bar{P}_r$ определяется из условия

$$\bar{P}_r = \min [\bar{P}_g(\varphi, \bar{h}, \bar{\Omega}); \bar{P}_{np}(\varphi, \bar{h})], \quad (2.4)$$

где $\bar{P}_g$ и $\bar{P}_{np}$ определяются из формул (1.6) и (2.3).

Оптимальный проект оболочки определяется из условия

$$\bar{P}_0 = \max_{\varphi} \bar{P}_r = \max_{\varphi} \min [\bar{P}_g; \bar{P}_{np}]. \quad (2.5)$$

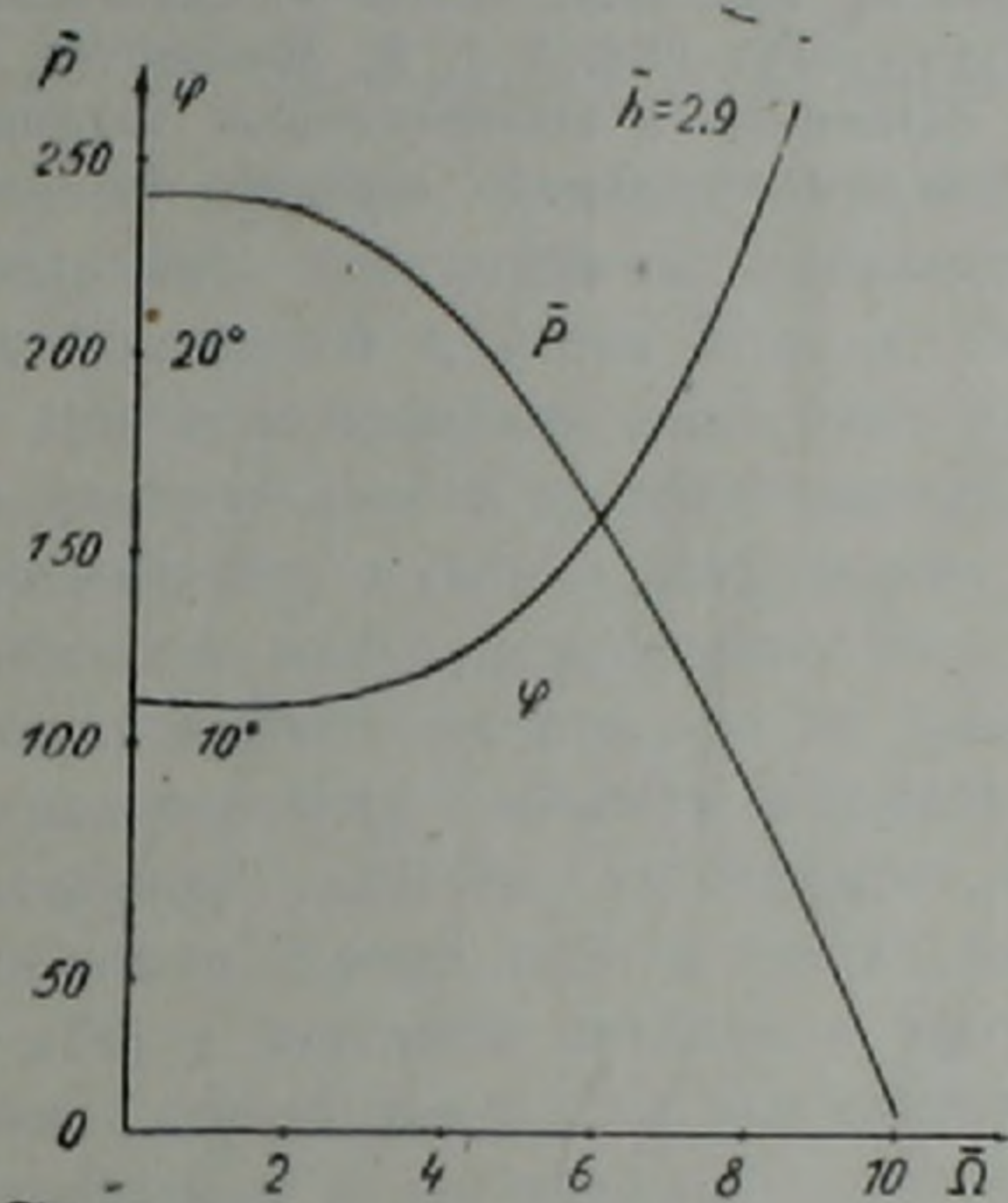
Рассмотрим цилиндрическую оболочку, изготовленную из монослоев ортотропного КМ с характеристиками (7)

$$B_{22}^0 = 0,33 B_{11}^0, \quad B_{12}^0 = 0,082 B_{11}^0, \quad B_{66}^0 = 0,16 B_{11}^0,$$

$$\sigma_{B1} = 1,9 \cdot 10^{-2} B_{11}^0, \quad \sigma_{B2} = 0,25 \cdot 10^{-2} B_{11}^0, \quad \tau_{B0} = 0,075 \cdot 10^{-2} B_{11}^0.$$

При этих данных и $l/\pi R = 0,5$ для различных $\bar{h}$, $\bar{\Omega}$ в таблице приведены значения расчетных нагрузок и соответствующие оптимальные углы. При $\bar{h} = 8,49$ и рассмотренных нагрузках активным является лишь ограничение на прочность. Следовательно, оптимальным является угол $\varphi_0 = 0^\circ$.

$\bar{\Omega}$	$\bar{h}$		
	1,15	2,9	8,49
0	$\frac{41}{20^\circ}$	$\frac{236}{10^\circ}$	$\frac{1596}{0^\circ}$
2	$\frac{37}{20^\circ}$	$\frac{233}{11^\circ}$	$\frac{1596}{0^\circ}$
4	$\frac{24}{30^\circ}$	$\frac{208}{12^\circ}$	$\frac{1596}{0^\circ}$



На графике при $\bar{h}=2,9$ приведены зависимости расчетной нагрузки и оптимального угла φ_0 от величины первой частоты собственных колебаний $\bar{\Omega}$.

Ереванский государственный университет

Վ. Վ. ԴԵՌԵՆԻ

Կոմպոզիցիոն նյութից պատրաստված, առանցքային ուժով սեղմված օպտիմալ գլանային թաղանթի հախազմումը ամրության և սեփական տատանումների հաճախականության վրա սահմանափակումների դեպքում

Աշխատանքում գտնված է տրված սեփական տատանումների առաջին հաճախականություն ունեցող, առանցքային ուժով սեղմված, կոմպոզիցիոն նյութից պատրաստված փակ գլանային թաղանթի օպտիմալ հախազմը ամրության սահմանափակման դեպքում: Կախված առաջին (ամենափոքր) սե-

փակումն տառապանքների հաճախակիությունը արժեքից և թաղանթի հաստությանից, որոշվում է թաղանթի սպորիմալ կառուցվածքը, որը ապահովում է նրա ամենամեծ կրողունակությունը:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԸՇԱՆՔՐԵՑՈՒՄ

- ¹ В. В. Болотин, Динамическая устойчивость упругих систем, ГИТТЛ, М.—Л., 1956. ² С. А. Амбарцумян, Общая теория анизотропных оболочек, Наука, М., 1976. ³ Н. А. Алфцтов, П. А. Зиновьев, Б. Г. Попов, Расчет многослойных пластинок и оболочек из композиционных материалов, Машиностроение, М., 1984. ⁴ В. В. Васильев, Механика конструкций из композиционных материалов, Машиностроение, М., 1988. ⁵ В. С. Саркисян, Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела, Изд-во ЕГУ, 1976. ⁶ А. К. Малмейстер, В. П. Тамуж, Г. А. Тетерс, Сопротивление полимерных и композиционных материалов, Зинатне, Рига, 1980. ⁷ R. M. Jones, Mechanics of composite materials, Mc Crow-Hill, N. Y., 1975.