ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Том 90 1990 № 3

УДК 517.954

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН Армянской ССР **А. Б. Нерсесян, К. А. Сугян**

Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области, ограниченной лемнискатой

(Представлено 27/III 1990)

Введение. Как известно, задача Дирихле для уравнения Лапласа разрешима в явном виде лишь в случае областей частного вида (полупространство, круг, круговое кольцо). Разумеется, явное решение можно выписать каждый раз, когда в наличии имеется функция, осуществляющая конформное отображение данной области, скажем, на круг. Однако при решении ряда прикладных задач (например, задачи кручения цилиндрических стержней) эта возможность практически не представляется.

Между тем представление решения в явном виде (скажем, через квадратуры) позволяет не только наметить удобный алгоритм численного решения, но и исследовать его качественные характеристики.

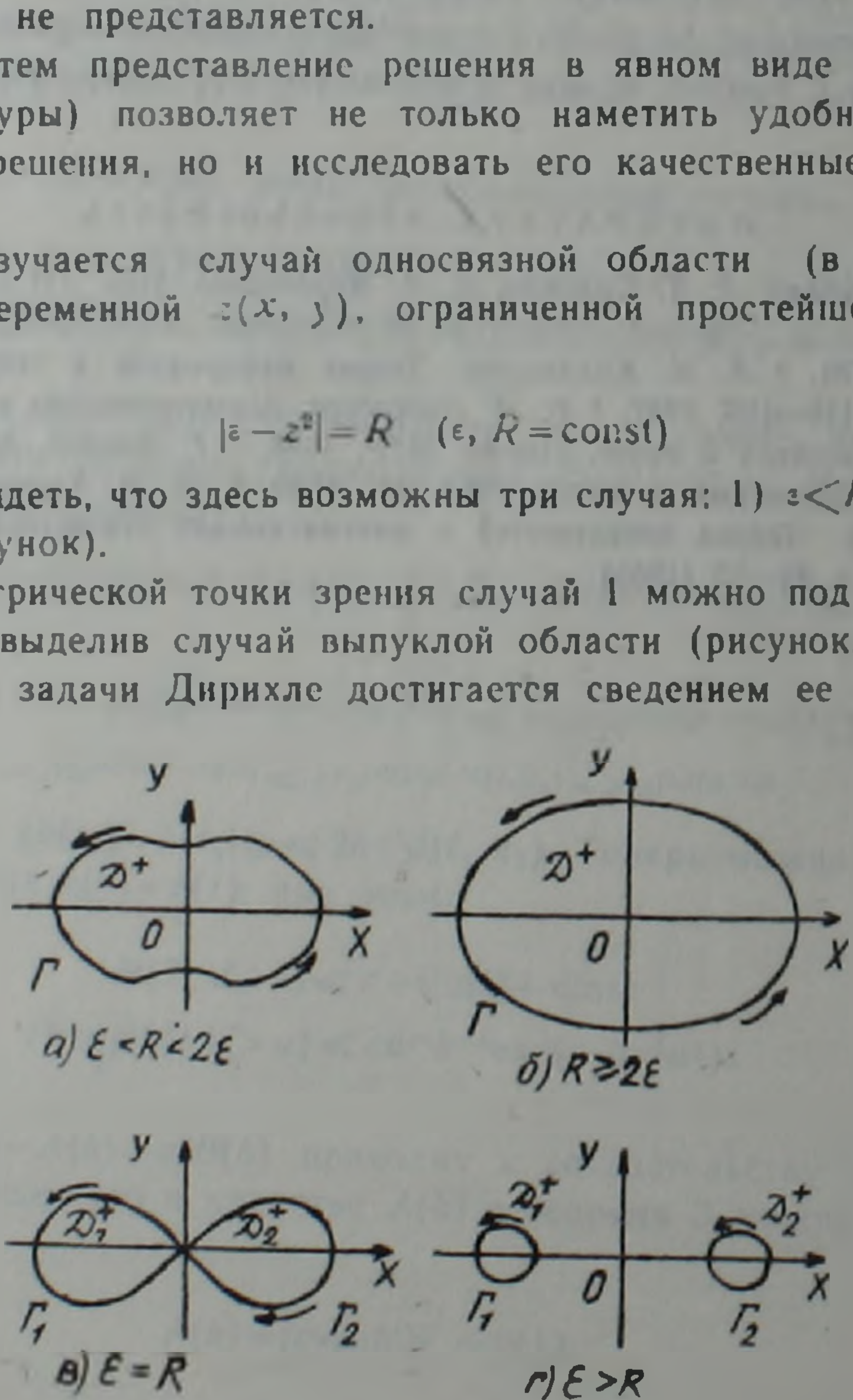
Ниже изучается случай односвязной области (в комплексной плоскости переменной $z(x, y)$), ограниченной простейшей лемнискатой

$$|\varepsilon - z^2| = R \quad (\varepsilon,\ R = \mathrm{const})$$

Легко видеть, что здесь возможны три случая: 1) $\varepsilon < R$, 2) $\varepsilon > R$, и 3) $\varepsilon = R$ (рисунок).

С геометрической точки зрения случай 1 можно подразделить на два случая, выделив случай выпуклой области (рисунок, *б*).

Решение задачи Дирихле достигается сведением ее к задаче со-



пряжения Гильберта (задаче Римана) для пары аналитических функций.

1. Пусть дана кривая $\Gamma: |\varepsilon - z^2| = R$; $\varepsilon \geqslant 0$ (рисунок), разбивающая расширенную плоскость комплексной переменной на две области: D^+ — лежащую внутри кривой Γ, и D^- — дополнительную к $D^+ + \Gamma$.

Будем решать следующую задачу Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\Delta F(x; y) = 0; \qquad (1)$$

$$F(x, y)|_{(x, y) \in \Gamma} = \varphi(x; y), \qquad (2)$$

где $\varphi(x; y)$ — заданная непрерывная на Γ функция.

Очевидно задача (1), (2) в данном случае равносильна задаче Шварца: найти аналитическую в D^+ и непрерывную в $\overline{D^+}$ функцию $\Phi(z)$, для которой выполняется краевое условие

$$\operatorname{Re}\Phi(t) = \varphi(t), \quad t \in \Gamma. \qquad (3)$$

Чтобы решить задачу (3), представим искомую функцию $\Phi(z)$ в следующем виде:

$$\Phi(z) = \frac{\Phi(z) + \Phi(-z)}{2} + \frac{\Phi(z) - \Phi(-z)}{2} = \tilde{\Phi}_1(z^2) + z\tilde{\Phi}(z^2) =$$

$$= \Phi_1(\varepsilon - z^2) + z\Phi_2(\varepsilon - z^2),$$

где $\Phi_1(\varepsilon - z^2)$ и $\Phi_2(\varepsilon - z^2)$ аналитические функции.

Тогда имеем:

$$\operatorname{Re}\Phi(t) = \operatorname{Re}\Phi_1(\varepsilon - t^2) + \operatorname{Re}[t\Phi_2(\varepsilon - t^2)], \quad t \in \Gamma.$$

После преобразования $w = \varepsilon - z^2$ из задачи (3) получаются две новые задачи:

Найти аналитические в области $G^+: |w| < R$ функции $\Phi_1(w)$ и $\Phi_2(w)$, для которых на границе $L: |w| = R$ выполняются условия

$$\operatorname{Re}\Phi_1(\tau) = \varphi_1(\tau), \quad \tau \in L \qquad (4)$$

и

$$\operatorname{Re}[\sqrt{\varepsilon - \tau}\,\Phi_2(\tau)] = \varphi_2(\tau), \quad \tau \in L, \qquad (5)$$

где

$$\varphi_1(\tau) = \frac{1}{2}\left[\varphi(\sqrt{\varepsilon - \tau}) + \varphi(-\sqrt{\varepsilon - \tau})\right], \quad \varphi_2(\tau) = \frac{1}{2}\left[\varphi(\sqrt{\varepsilon - \tau}) - \varphi(-\sqrt{\varepsilon - \tau})\right], \quad \tau \in L.$$

Решение задачи (4), как задачи Шварца в круге G^+, независимо от соотношения между ε и R, дается формулой

$$\Phi_1(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi_1(\tau)\,\frac{\tau + w}{\tau - w}\,\frac{d\tau}{\tau} + iC, \qquad (6)$$

где C — произвольная вещественная константа.

Задача (5) представляет собою задачу Римана—Гильберта, которая сводится к задаче Римана следующим стандартным образом (см. [1]).

Из соотношения (5) имеем

$$\operatorname{Re}\sqrt{\varepsilon - \tau}\operatorname{Re}\Phi_2(\tau) - \operatorname{Im}\sqrt{\varepsilon - \tau}\operatorname{Im}\Phi_2(\tau) = \varphi_2(\tau)$$

или

$$\frac{\sqrt{\varepsilon-\tau}+\sqrt{\varepsilon-\bar\tau}}{2}\,\mathrm{Re}\Phi_2(\tau)+i\,\frac{\sqrt{\varepsilon-\tau}-\sqrt{\varepsilon-\bar\tau}}{2}\,\mathrm{Im}\Phi_2(\tau)=\varphi_2(\tau).$$

Отсюда получаем

$$\sqrt{\varepsilon-\tau}\,\Phi_2(\tau)+\sqrt{\varepsilon-\bar\tau}\,\overline{\Phi}_2(\tau)=2\varphi_2(\tau). \tag{7}$$

Введем новую функцию

$$\Phi_*(w)=\begin{cases}\Phi_2(w), & w\in G^+\\ \Phi_2\left(\dfrac{R^2}{\bar w}\right), & w\in G^-=\bar C\setminus\overline{G}^+.\end{cases}$$

Если значения функции $\Phi_*(w)$ при $w\in G^+$ обозначить через $\Phi_*^+(w)$, а при $w\in G^- - \Phi_*^-(w)$, то легко видеть, что на границе L

$$\Phi_*^+(\tau)=\Phi_2(\tau) \text{ и } \Phi_*^-(\tau)=\overline{\Phi}_2(\tau),$$

так что (7) можно записать в виде

$$\sqrt{\varepsilon-\tau}\,\Phi_*^+(\tau)+\sqrt{\varepsilon-\bar\tau}\,\Phi_*^-(\tau)=2\varphi_2(\tau),\quad \tau\in L$$

или, учитывая, что на окружности L $\bar\tau=\dfrac{R^2}{\tau}$, в виде

$$\sqrt{\varepsilon-\tau}\,\Phi_*^+(\tau)+\sqrt{\frac{\varepsilon\tau-R^2}{\tau}}\,\Phi_*^-(\tau)=2\varphi_2(\tau),\quad \tau\in L. \tag{8}$$

Итак, задачу (5) мы свели к задаче Римана: найти функции $\Phi_*^+(w)$ – аналитическую в круге G^+ и $\Phi_*^-(w)$ – аналитическую в G^-, удовлетворяющие на окружности L соотношению (8).

Для решения задачи (8) выделим три случая: 1) $\varepsilon<R$, 2) $\varepsilon>R$ и 3) $\varepsilon=R$.

2. При $\varepsilon<R$ из соотношения (8) получаем

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\tau-R^2}}\,\Phi_*^+(\tau)+\frac{1}{\sqrt{\tau(\varepsilon-\tau)}}\,\Phi_*^-(\tau)=\frac{2\varphi_2(\tau)}{\sqrt{(\varepsilon-\tau)(\varepsilon-\tau R^2)}},\quad \tau\in L. \tag{9}$$

Так как при $\varepsilon<R$ точка $w_1=\dfrac{R^2}{\varepsilon}\in G^-$, а точки $w_2=0\in G^+$ и $w_3=\varepsilon\in G^+$, то функция $\sqrt{\varepsilon w-R^2}$ является аналитической в G^+, а функция $\sqrt{w(\varepsilon-w)}$ — в G^-. Далее, функция $\dfrac{1}{\sqrt{w(\varepsilon-w)}}\,\Phi_*^-(w)$ на бесконечности принимает значение 0. Поэтому задача (9) есть задача отыскания кусочно-аналитической функции по заданному скачку, решение которой дается интегралом типа Коши:

$$H(w)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{2\varphi_2(\tau)}{\sqrt{(\varepsilon-\tau)(\varepsilon\tau-R^2)}(\tau-w)}\,d\tau, \tag{10}$$

где

$$H^+(w)=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon w-R^2}}\,\Phi_*^+(w),\quad H^-(w)=-\frac{1}{\sqrt{w(\varepsilon-w)}}\,\Phi_*^-(w).$$

Из (10) получаем решение задачи (5) в случае 1:

$$\Phi_2(w)=\frac{\sqrt{\varepsilon w-R^2}}{\pi i}\int_L \frac{\varphi_2(\tau)}{\sqrt{(\varepsilon-\tau)(\varepsilon\tau-R^2)}}\,\frac{d\tau}{\tau-w}. \tag{11}$$

При обратном преобразовании $z=\sqrt{\varepsilon-w}$ окружность L переходит в часть кривой Γ, лежащую в полуплоскости $\operatorname{Re} z\leq 0$ и обозначенную через Γ_1. Остальную часть кривой Γ обозначим через Γ_2, так что $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$. Тогда из формул (6) и (11), используя то обстоятельство, что точка $-t\in\Gamma_2$, если $t\in\Gamma_1$, получаем решение задачи (3) в случае $\varepsilon<R$:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\left[\frac{t(t^2+z^2-2\varepsilon)}{t^2-\varepsilon}+\frac{2z\sqrt{\varepsilon^2-\varepsilon z^2-R^2}}{\sqrt{\varepsilon^2-\varepsilon t^2-R^2}}\right]\frac{\varphi(t)}{t^2-z^2}\,dt+iC, \tag{12}$$

где C — произвольная вещественная константа.

3. В случае 2 задачу (3) можно решить непосредственно, не разбивая ее на две задачи (4) и (5). В самом деле, решим сначала задачу в области D_1^*, ограниченной кривой $\Gamma_1:|\varepsilon-z^2|=R$; $\operatorname{Re} z<0$ (рисунок, г слева):

$$\operatorname{Re}\Psi(t)=\varphi(t),\quad t\in\Gamma_1. \tag{13}$$

Преобразование $w=\varepsilon-z^2$ переводит кривую Γ_1 в окружность $L:|w|=R$, и соотношение (13) записывается в виде

$$\operatorname{Re}\Psi(\sqrt{\varepsilon-\tau})=\varphi(\sqrt{\varepsilon-\tau}),\quad \tau\in L. \tag{14}$$

Так как при $\varepsilon<R$ функция $\sqrt{\varepsilon-w}$ аналитична в круге G^*, то функция $\Psi(\varepsilon-w)$ также аналитична в G^*, и решение задачи (14), как задачи Шварца в круге, запишется формулой

$$\Psi(\varepsilon-w)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\varphi(\varepsilon-\tau)\,\frac{\tau+w}{\tau-w}\,\frac{d\tau}{\tau}+iC_1,$$

откуда

$$\Psi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{t(t^2+z^2-2\varepsilon)}{(t^2-\varepsilon)(t^2-z^2)}\varphi(t)\,dt+iC_1. \tag{15}$$

Из проведенных рассуждений ясно, что при постановке задачи в области D_2^* (рисунок, г справа) ее решение выразится также в виде (15), но интегрированием по кривой Γ_2, поэтому и решение задачи (3) представляется формулой

$$\Phi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_k}\frac{t(t^2+z^2-2\varepsilon)}{(t^2-\varepsilon)(t^2-z^2)}\varphi(t)\,dt+iC_k;\ z\in D_k,\ k=1,2, \tag{16}$$

где C_k, $k=1,2$ — произвольные вещественные постоянные.

4. Решение задачи в случае $\varepsilon=R$ в техническом отношении почти ничем не отличается от предыдущего случая. Теми же рассуждениями (учитывая также, что интегрирование по кривой Γ_2 производится в отрицательном направлении) получаем решение в виде

$$
\Phi(z)=\begin{cases} \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma_1}\dfrac{t(t^2+z^2-2\varepsilon)}{t^2-\varepsilon}\,\dfrac{\varphi(t)}{t^2-z^2}\,dt+iC_1, & z\in D_1\\ -\dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma_1}\dfrac{t(t^2+z^2-2\varepsilon)}{t^2-\varepsilon}\,\dfrac{\varphi(t)}{t^2-z^2}\,dt+iC_2, & z\in D_2. \end{cases} \tag{17}
$$

5. Это решение, однако, существенно отличается от решений (12) и (16) своим поведением в окрестности точки 0, что естественно с физической точки зрения вследствие «заострения».

Исследуем поведение решения (17) при $z\to 0$ для точек z, принадлежащих, скажем, области D_1^{*}. Для этого точками пересечения t_1, t_2 кривой Γ_1 с окружностью достаточно малого радиуса и с центром в начале координат разобьем кривую Γ_1 на кривые γ_1, γ_2 и $\Gamma_1-\gamma_1-\gamma_2$. В соответствии с этим функцию $\Phi(z)$ представим в виде интегралов с кривыми интегрирования γ_1, γ_2, $\Gamma_1-\gamma_1-\gamma_2$:

$$
\Phi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_1}F(z;t)\varphi(t)\,dt=\frac{1}{\pi i}\left\{\int_{\gamma_1}+\int_{\Gamma_1-\gamma_1-\gamma_2}+\int_{\gamma_2}\right\}=\frac{1}{\pi i}\left\{\int_{\gamma_1}F(z,t)[\varphi(t)-\right.
$$

$$
-\varphi(0+)]\,dt+\int_{\Gamma_1-\gamma_1-\gamma_2}F(z,t)\varphi(t)\,dt+\int_{\gamma_2}F(z,t)[\varphi(t)-\varphi(0-)]\,dt+
$$

$$
\left.+\varphi(0+)\int_{\gamma_1}F(z,t)\,dt+\varphi(0-)\int_{\gamma_2}F(z,t)\,dt\right\},
$$

где $F(z,t)$—ядро интеграла (17) при $z\in D_1$.

Второй интеграл при $z\to 0$ остается ограниченным и непрерывным, а два последних интеграла преобразованием $\tau=\dfrac{\varepsilon-t^2}{\varepsilon}$ легко вычисляются, так что имеем

$$
\int_{\gamma_1}F(z,t)\,dt=\ln(z^2-t_1^2)-2\ln z-\frac{1}{2}\ln(\varepsilon-t_1^2)+\frac{1}{2}\ln\varepsilon,
$$

$$
\int_{\gamma_2}F(z,t)\,dt=\frac{1}{2}\ln(\varepsilon-t_2^2)-\ln(z^2-t_2^2)+2\ln z-\frac{1}{2}\ln\varepsilon.
$$

Таким образом

$$
\Phi(z)=\frac{1}{\pi i}\left\{\int_{\gamma_1}F(z,t)[\varphi(t)-\varphi(0+)]\,dt+\int_{\gamma_2}F(z,t)[\varphi(t)-\varphi(0-)]\,dt+\right.
$$

$$
\left.+\int_{\Gamma_1-\gamma_1-\gamma_2}F(z,t)\varphi(t)\,dt\right\}+[\ln(z^2-t_1^2)-\ln(\varepsilon-t_1^2)+\ln\varepsilon]\varphi(0+)+
$$

$$
+[\ln(\varepsilon-t_2^2)-2\ln(z^2-t_2^2)-\ln\varepsilon]\varphi(0-)+4[\varphi(0-)-\varphi(0+)]\ln z.
$$

Из полученного видно, что при $\varphi(0+)\neq\varphi(0-)$ $\Phi(z)\to\infty$, если $z\to 0$.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ թղթակից անդամ Հ. Բ. ՆԵՐՍԻՍՅԱՆ, Կ. Ա. ՍՈՒՂՅԱՆ

Լապլասի հավասարման համար Դիրիխլեի խնդրի լուծումը լեմնիսկատով սահմանափակված տիրույթում

Հոդվածում դիտարկվում է Լապլասի հավասարման համար Դիրիխլեի խնդիրը լեմնիսկատով սահմանափակված տիրույթում և տրվում է նրա լուծումը բացահայտ տեսքով՝ Դիրիխլեի խնդիրը բերելով անալիտիկ ֆունկցիաների զույգի համար Ռիմանի խնդրի։

Դիտարկվող խնդրի լուծումը բացահայտ տեսքով հնարավորություն է տալիս նշելու թվային լուծման համար ալգորիթմ և հետազոտելու նրա որակական հատկությունները։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 *Н. П. Векуа*. Системы сингулярных интегральных уравнений. Наука, М., 1970.