ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Том 90 1990 №3

УДК 519.217

МАТЕМАТИКА

А. Х. Симонян, Е. И. Островский

Точность аппроксимации гауссовского поля регрессионными сплайнами

(Представлено академиком АН Армянской ССР Р. В. Амбарцумяном 15/III 1990)

0. Цель работы — изучение отклонения в равномерной норме гауссовского случайного центрированного поля $\xi(t)$, $t\in T$, от регрессионного сплайна, определяемого равенством

$$\xi(t|S)=M\{\xi(t)|\xi(s_1),\dots,\xi(s_n)\}. \tag{1}$$

Здесь S—конечное подмножество T, $S=\{s_1,\dots,s_n\}$, $s_i\in T$, называемое далее сетью, или, подробнее, регрессионной сетью T.

Сплайны вида (1) решают задачу оптимальной в среднем квадратичном интерполяции поля $\xi(t)$ по его значениям в сетке S. В ([1]) доказано, что частным случаем регрессионных сплайнов являются классические одномерные сплайны, так что определение (1) может рассматриваться как обобщение понятия сплайна на случай произвольного T.

С практической точки зрения важно оценить погрешность сплайн-интерполяции, т. е. величину

$$P(S,u)=P\{\sup_t|\xi(t)-\xi(t|S)|>u\}. \tag{2}$$

В ([2]) выведены точные асимптотики вероятностей (2) для стационарных процессов $\xi(t)$ на отрезке $[0,1]$. В общем случае точной асимптотики не существует, поэтому мы выведем для вероятности $P(S,u)$ оценки сверху и снизу.

1. Введем необходимые обозначения. Для каждой сети S положим

$$\sigma^2(S)=\sup_t D\{\xi(t)|\xi(s_1),\dots,\xi(s_n)\}=\sup_t M|\xi(t)-\xi(t|S)|^2.$$

В дальнейшем, не снижая общности, будем считать, что $\max_t M\xi^2(t)=1$, или, вводя ковариационную функцию

$$R(t,s)=\mathrm{cov}\{\xi(t),\xi(s)\}:\ \max_t R(t,t)=1. \tag{3}$$

Пусть $h\in(0,1)$. Сеть $S(h)$ называется h-оптимальной регрессионной, если $|S|=\min$ ($|S|$—число элементов в S) при условии, что $\sigma(S)\leq h$. Метрика Дадли $d(s,t)$ на T вводится равенством $d(t,s)=\{M[\xi(t)-\xi(s)]^2\}^{1/2}$. Энтропией по А. Н. Колмогорову $H(Q,d,\varepsilon)$ подмножества $Q\subseteq T$ называется натуральный логарифм наименьшего числа d-шаров радиуса $\varepsilon>0$, покрывающих Q([3]). Пусть $B(t,\delta)=$

$=\{s:d(t,s)<\delta\}$ — шар с центром в t и радиуса $\delta>0$. Будем говорить, что множество T имеет точную размерность $\varkappa$, если

$$\varkappa=\inf\left\{\varkappa'\geqslant 0: H(T,d,\varepsilon)\leqslant H_0+\varkappa'\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),\ \varepsilon\leqslant 1\right\}. \qquad (4)$$

Условие (1) выполнено, в частности, если T — ограниченное выпуклое множество в R^k и $\xi(t)$ — стационарное изотропное поле с ковариационной функцией вида

$$r(t)=1-|t|^{\alpha}(1+o(1)),\ t\to 0,\ |t|^2=\sum_{i=1}^{k}t_i^2,\ \alpha\in(0,2).$$

Тогда $d(t,s)\leqslant c|t-s|^{\alpha/2}$ и $\varkappa=2k/\alpha$.

2. Вспомогательные факты.

Лемма 1. *Если $S(h)$ — оптимальная регрессионная h-сеть,*

$$\ln|S(h)|\leqslant H(T,d,h).$$

Действительно, рассматривая в качестве сети минимальную метрическую d-сеть, т. е. такую, для которой

$$\forall t\in T\ \exists t_i,\quad d(t_i,t)\leqslant h,$$

имеем, по определению метрики d:

$M\{\xi(t)-\xi(t_i)\}^2\leqslant h^2$, так что сеть $\{t_1,\ldots,t_n\}$ есть также регрессионная h-сеть.

Приведем пример, показывающий, что неравенство, противоположное утверждению леммы 1, не имеет места. Пусть $\xi(t)$ — гауссовский стационарный процесс, $T=[0,1]$, дифференцируемый в среднем квадратичном m раз, $m\geqslant 2$, что эквивалентно включению $r(t)\in C^{2m}$. В [1] доказано, что для равномерной сетки S, содержащей $\sim\varepsilon^{-1}$ элементов, $\sigma^2(S)\leqslant c\varepsilon^{2m}$. Следовательно, $\ln|S(h)|\leqslant c+m^{-1}|\ln h|$. В то же время $d(t,s)\geqslant c|t-s|$, и поэтому $H(T,d,h)\geqslant c+|\ln h|$. Вообще с ростом гладкости $\xi(t)$ $S(h)$ существенно уменьшается, а $H(T,d,h)$ — нет.

Лемма 2. *Пусть $\xi(t)$ — гауссовское центрированное поле и выполнены условия* (3) *и* (4). *Тогда существуют абсолютные константы c_1, c_2 такие, что при всех $u\geqslant\sqrt{\varkappa}$*

$$P\{\sup_t|\xi(t)|>u\}\leqslant c_1c_2^{\varkappa}\varkappa^{-\varkappa}u^{2\varkappa-1}\exp\left\{H_0-\frac{u^2}{2}\right\}.$$

Утверждение леммы легко вытекает из [4], с. 68.

Лемма 3. *При любом конечном S регрессионный сплайн $\xi(t|S)$ d-непрерывен с вероятностью* 1.

Доказательство. Можно считать, что $S=\{s_1,\ldots,s_n\}$, причем $\xi(s_l)$ линейно независимы. Тогда

$$\xi(t|S)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(t)\xi(s_k),$$

где коэффициенты $\varphi_k(t)$ находятся из системы уравнений

$$R(t,s_l)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(t)R(s_k,s_l).$$

Следовательно, $\varphi_k(t)$ линейно выражаются через $R(t,s_l)$ и поэтому имеют ту же гладкость, что и ковариационная функция $R(t, s)$.

3. Основной результат.

Теорема 1. *Пусть S—произвольная h-сеть, т. е. такая, что* $\rho(S)\leqslant h$ *и* $h\leqslant 3/4$. *Предположим также условия* (3) *и* (4). *Тогда*

а) *при* $\varkappa>1/2$

$$P\{\sup_t h^{-1}|\xi(t)-\xi(t|S)|>A(h)+z/A(h)\}\leqslant$$

$$\leqslant c(\varkappa)(1+z)^{2\varkappa-1}\exp\{-[z+z^2/(2A^2(h))]\};$$

б) *при* $\varkappa\leqslant 1/2$

$$P\{\sup_t h^{-1}|\xi(t)-\xi(t|S)|>A(h)+z/A(h)\}\leqslant$$

$$\leqslant c(\varkappa)\exp\{-[z+z^2/(2A^2(h))]\},$$

где c зависит лишь от $\varkappa$, $A(h)$—максимальный корень уравнения

$$A^{2\varkappa-1}\exp(-A^2/2)=h^\varkappa.$$

В формулировке теоремы 1 можно взять также

$$A(h)=\sqrt{2\varkappa|\ln h|}+\frac{(2\varkappa-1)\ln|\ln h|}{2\sqrt{2\varkappa|\ln h|}}.$$

Доказательство. Рассмотрим гауссовское центрированное нормированное поле уклонений

$$\Delta_h(t)=h^{-1}(\xi(t)-\xi(t|S))$$

и применим к нему лемму 2. Из определения h-сплайна ясно, что $D\Delta_h(t)\leqslant 1$. Из свойств условных математических ожиданий следует:

$$D(\Delta_h(t)-\Delta_h(s))\leqslant h^{-2}M\{(\xi(t)-\xi(s))-M[\xi(t)-\xi(s)|\xi(s_i)]\}^2\leqslant$$

$$\leqslant h^{-2}M[\xi(t)-\xi(s)]^2=d^2(t, s)/h^2.$$

Или, обозначая $d_\Delta(t, s)=D^{1/2}(\Delta_h(t)-\Delta_h(s))$:

$$d_\Delta(t, s)\leqslant h^{-1}d(t, s).$$

Оценим теперь энтропию $H(T, d_\Delta, \varepsilon)$ шара $T=B(t, \delta)$, $\delta=1$, в метрике $d_\Delta(t, s)$. Заметим, что шар (T, d_Δ) содержится в шаре (T, d), $\delta=1$, и потому $H(T, d_\Delta, \varepsilon)\leqslant H_0+\varkappa|\ln h\varepsilon|$. Если $\{t_1, \ldots, t_N\}$ есть εh-метрическая сеть T относительно метрики $d(t, s)$, то

$$d_\Delta(t, t_i)\leqslant\varepsilon.$$

Отсюда следует, что $\{t_1, \ldots, t_N\}$ есть ε-сеть T в метрике $d_\Delta(t, s)$, так как $d_\Delta\leqslant h^{-1}d$.

По условию (4)

$$\ln N\leqslant H_0+\varkappa|\ln h\varepsilon|,$$

поэтому $H(T, d_\Delta, \varepsilon)\leqslant(H_0+\varkappa|\ln h|)+\varkappa|\ln\varepsilon|$.

По лемме 2

$$P\{\sup_t|\Delta_h(t)|>u\}\leqslant c_1c_2^\varkappa\varkappa^{-\varkappa}\exp\left\{H_0+\varkappa\ln\frac{1}{h}\right\}\times$$

$$\times u^{2\varkappa-1}\exp\{-u^2/2\}=c(\varkappa)(1/h)^\varkappa u^{2\varkappa-1}\exp\{-u^2/2\},$$

$$c(\varkappa)=c_1c_2^\varkappa\varkappa^{-\varkappa}\exp\{H_0\}.$$

Делая замену $u=A(h)+z/A(h)$, приходим после простых преобразований к утверждению теоремы.

Следствие. *С вероятностью* 1

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{\sup_t|\xi(t)-\xi(t|S)|}{h\sqrt{2|\ln h|}}\leq\sqrt{\varkappa}.$$

Утверждение следствия вытекает из теоремы 1 и леммы Бореля — Кантелли.

4. В этом пункте приведем пример оценки снизу $P(S,u)$, показывающий неулучшаемость оценки теоремы 1. Пусть $T=[0,1]$, $\xi(t)$ — гауссовский стационарный процесс с корреляционной функцией $r(t)=\exp(-|t|^{\alpha})$, $\varkappa=\frac{2}{\alpha}$, $\alpha\in(0,2]$.

Теорема 2. *Для некоторой константы* c, *зависящей лишь от* α, *справедливо неравенство*

$$P\left\{\sup_t h^{-1}|\xi(t)-\xi(t|S(h))|>\sqrt{2\varkappa\ln\frac{1}{h}}+\frac{z}{\sqrt{2\varkappa|\ln h|}}\right\}\geq c(\alpha)e^{-z}.$$

Доказательство. Рассмотрим гауссовский нормированный процесс уклонений $\Delta_h(t)$.

Оптимальная h-сеть здесь равномерна и $|S(h)|\sim h^{-2/\alpha}$ (см. [2]). Имеем

$$\sup_t|\Delta_h(t)|\geq\max_i(\Delta_h(0,5h^{2/\alpha}+ih^{2/\alpha})),$$

где максимум берется по i в пределах от 0 до $N=|S(h)|$. Введем также гауссовскую стационарную нормированную последовательность $\eta_i=\Delta_h(0,5h^{2/\alpha}+ih^{2/\alpha})$. Используя явный вид и свойства $r(t)$, для корреляции $\rho(k)=M\eta_i\eta_{i+k}$ можно вывести оценки

$$c_1(\alpha)k^{-\alpha}\leq\rho(k)\leq c_2(\alpha)k^{-\alpha},\quad k>1.$$

В [5] доказано, что для таких последовательностей

$$P\{\max_{i=\overline{1,N}}\eta_i>\sqrt{2\ln N}+z/\sqrt{2\ln N}\}\geq c_3(\alpha)\exp(-z).$$

Возвращаясь к процессу $\xi(t)$, выводим при $z>1$

$$P\{\sup_t|\Delta_h(t)|>\sqrt{2\varkappa|\ln h|}+z/\sqrt{2\varkappa|\ln h|}\}\geq c_3(\alpha)\exp(-z),$$

т. е. утверждение теоремы 2. Отметим в качестве следствия:

$$\overline{\lim_{h\downarrow 0}}\sup_t\frac{|\xi(t)-\xi(t|S(h))|}{h\sqrt{2|\ln h|}}=\sqrt{\varkappa}\ \text{п. н.}$$

5. Коснемся вкратце возможных обобщений. Откажемся от предположения гауссовости $\xi(t)$, заменив его существенно более слабым требованием экспоненциального убывания „хвостов". Положим $\varphi_p(\lambda)=\lambda^2$ при $|\lambda|\leq p^{-1/(p-2)}$ и $\varphi_p(\lambda)=|\lambda|^p/p$ в области $|\lambda|>p^{-1/(p-2)}$, $p>1$. Центрированная случайная величина η принадлежит классу B_p: $\eta\in B_p$, если существует константа τ такая, что для всех вещественных λ

$$M\exp(\lambda\eta)\leq\exp(\varphi_p(\tau\lambda)).\qquad(5)$$

Наименьшая константа τ, удовлетворяющая (5) при всех λ, обозначается $\|\eta\|_p$. В ([8]) доказано, что функционал $\eta\to\|\eta\|_p$ является на множестве B_p нормой, превращающей B_p в банахово пространство. При этом включение $\eta\in B_p$ эквивалентно для некоторой константы $c>0$ неравенству при $x>1$

$$P\{|\eta|>x\}<2\exp(-cx^q\|\eta\|_p^{-q}q^{-1}).$$

Здесь $p^{-1}+q^{-1}=1$. Следующий результат несколько усиливает имеющуюся в ([6]) оценку.

Лемма 4. *Пусть $\eta(t)$—случайное поле, $t\in T$, $\sup\limits_t\|\eta(t)\|_p=1$,*

$$d(t,s)=\|\eta(t)-\eta(s)\|_p,$$

$$H(T,d,\varepsilon)\leqslant H_0+\varkappa|\ln\varepsilon|.$$

Тогда при $u\geqslant c(\varkappa)$

$$P\{\sup_t|\eta(t)|>u\}\leqslant cu^{q\varkappa}\exp\{H_0-u^qq^{-1}\}.$$

Обобщая данное ранее определение, скажем, что конечное множество S называется регрессионной h-сетью, если $\sup\limits_t\|\xi(t)-\xi(t|S)\|_p\leqslant$ $\leqslant h$; здесь, как и ранее, $\xi(t|S)=M\{\xi(t)|F(S)\}$, $F(S)=\sigma\{\xi(s_i),\ s_i\in S\}$.

Теорема 3. *Предположим, что $\xi(t)$—случайное поле, такое, что $\sup\limits_t\|\xi(t)\|_p=1$, $d(t,s)=\|\xi(t)-\xi(s)\|_p$, $\varkappa=\dim_dT$, S—регрессионная h-сеть, $h<\dfrac{3}{4}$, $A=A(h)$ есть максимальный корень уравнения $A^{q\varkappa}\exp(-A^q/q)=h^\varkappa$ и $B(h)=|A(h)|^{1/(p-1)}$. Тогда при $z>c_p(\varkappa)$*

$$P\{\sup_t h^{-1}|\xi(t)-\xi(t|S)|>A(h)+z/B(h)\}\leqslant c(1+z)^{q\varkappa}e^{-z}.$$

Доказательство. Рассмотрим, как и ранее, поле $\Delta(t)=$ $=h^{-1}(\xi(t)-\xi(t|S))$. По определению h-сети $\|\Delta(t)\|_p\leqslant 1$. На основании неравенства треугольника

$$\|\Delta(t_1)-\Delta(t_2)\|_p\leqslant h^{-1}(\|\xi(t_1)-\xi(t_2)\|_p+\|\xi(t_1|S)-\xi(t_2|S)\|_p).$$

Далее,

$$Me^{\lambda(\xi(t_1|S)-\xi(t_2|S))}=Me^{\lambda(M(\xi(t_1)-\xi(t_2)|F(S)))}\leqslant MM\{e^{\lambda(\xi(t_1)-\xi(t_2))}|F(S)\}=$$

$$=Me^{\lambda(\xi(t_1)-\xi(t_2))}\leqslant e^{\varphi_p(\lambda\|\xi(t_1)-\xi(t_2)\|_p)}=e^{\varphi_p(\lambda d(t_1,t_2))}.$$

Следовательно, $\|\Delta(t_1)-\Delta(t_2)\|_p\leqslant 2h^{-1}d(t_1,t_2)$. Теперь можно применить лемму 4, полагая $\eta(t)=\Delta(t)$; при этом

$$H(T,d_\Delta,\varepsilon)\leqslant c+\varkappa|\ln h|+\varkappa|\ln\varepsilon|;$$

$$P\{\sup_t|\Delta(t)|>u\}\leqslant cu^{q\varkappa}h^{-\varkappa}\exp(-q^{-1}u^q).$$

Подстановка $u=A(h)+z/B(h)$ приводит к доказательству теоремы 3.

Заметим еще, что в качестве $A(h)$ в теореме 3 можно взять величину

$$A(h)=(q\varkappa|\ln h|)^{\frac{1}{q}}+o(1)$$

Модифицировав пример п. 4, легко показать, что оценка также неулучшаема. Именно, можно взять $\tilde{\xi}(t)=(\xi(t))^{q/2}$, где

$$(x)^{q/2}=\begin{cases} x^{q/2}, & x>0 \\ -|x|^{q/2}, & x<0 \end{cases}.$$

Ереванский государственный университет
Обнинский институт атомной энергетики

Ա. Խ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ, Ե. Ի. ՕՍՏՐՈՎՍԿԻ

Գաուսյան դաշտի ռեգրեսիոն սպլայններով մոտարկման ճշտությունը

$\xi(t)$, $t\in T$ պատահական դաշտի և $S=\{s_1, \ldots, s_n\}$ վերջավոր ենթաբազմության համար ռեգրեսիոն սպլայն է կոչվում $M\{\xi(t)|\xi(s_i),\ i=\overline{1,n}\}$ պատահական դաշտը, որի միջոցով լուծվում է $\xi(t)$-ն օպտիմալ ձևով վերականգնելու խնդիրը S ցանցի վրա տրված արժեքների միջոցով:

Պատահական դաշտի և նրան մոտարկող ռեգրեսիոն սպլայնի համասարաչափ նորմայով դիտարկված շեղվածության հավանականության համար հոդվածում ստացված են վերին էքսպոնենցիալ գնահատականներ և օրինակի միջոցով ցույց է տրված, որ այդ գնահատականները հնարավոր չի լավացնել:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ю. К. Беляев, А. Х. Симонян, В. А. Красавкина*, Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, № 4, с. 139—147, 1976. [2] *А. Х. Симонян*, ДАН АрмССР, т. 66, № 2, с. 84—90 (1978). [3] *А. Н. Колмогоров*, Теория информации и теория алгоритмов, Наука, М., с. 119—199, 1987. [4] *В. И. Питербарг*, Асимптотические методы в теории гауссовских процессов и полей, Изд-во МГУ, 1988. [5] *Г. Крамер, М. Р. Лидбеттер*, Стационарные случайные процессы, Мир, М., 1969. [6] *Ю. В. Козаченко, Е. И. Островский*, в кн.: Теория вероятностей и математическая статистика, Вища школа, Киев, вып. 32, с. 42—53 (1985).