

УДК 517.53

Ф. А. Шамоян

О параметрическом представлении классов
 Неванлинны—Джрбашяна

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 18/II 1990)

Пусть D —единичный круг на комплексной плоскости, Γ —его граница, $H(D)$ —множество всех голоморфных в D функций. В работах М. М. Джрбашяна (1-3) были введены следующие классы функций:

$$A_{\alpha}^* = \left\{ f \in H(D) : \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (1-r)^{\alpha-1} \log^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi dr < +\infty \right\},$$

($\alpha > 0$)

$$A_{\alpha} = \left\{ f \in H(D) : \sup_{r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^r (r-t)^{\alpha-1} \log^+ |f(te^{i\varphi})| dt \right) d\varphi < +\infty \right\}.$$

В указанных работах получены представления этих классов, а именно:

Теорема А. Если $f \in A_{\alpha}^*$, то f допускает представление

$$f(z) = C_{\alpha} z^{\lambda} \pi_{\alpha}^f(z, z_k) \exp \left\{ \frac{\alpha}{\pi} \int_D \frac{(1-|\zeta|^2)^{\alpha-1} \log^+ |f(\zeta)| dm_2(\zeta)}{(1-\bar{\zeta}z)^{\alpha+1}} \right\}, \quad z \in D, \quad (1)$$

где C_{α} —комплексное число, λ —целое, неотрицательное число, m_2 —плоская мера Лебега, π_{α}^f произведение, имеющее вид:

$$\pi_{\alpha}^f(z, z_k) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k} \right) \exp \left\{ - \frac{\alpha}{\pi} \int_D \frac{(1-|\zeta|^2)^{\alpha-1} \log^+ \left| 1 - \frac{\zeta}{z_k} \right|}{(1-\bar{\zeta}z)^{\alpha+1}} dm_2(\zeta) \right\}, \quad z \in D$$

Причем $\pi_{\alpha}^f(z, z_k)$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|)^{\alpha+1} < +\infty \quad (2)$$

Еще раньше Р. Неванлинна (см. (4)) доказал, что если $f \in A_{\alpha}^*$, $f(z_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$, $f \neq 0$, то справедливо (2).

Теорема Б. Класс A_{α} совпадает с классом функций f , допускающих представление

$$f(z) = C_\lambda z^\lambda B_\alpha(z, z_k) \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{2}{(1 - e^{-i\theta} z)^{\alpha+1}} - 1 \right) d\psi(\theta) \right\}, \quad z \in D, \quad (3)$$

где ψ — произвольная вещественная функция конечной вариации на $[-\pi, \pi]$, $\{z_k\}_1^\infty$ — произвольная последовательность из D , для которой выполняется (2), B_α — произведение вида

$$B_\alpha(z, z_k) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{z_k} \right) \exp \{ -W_\alpha(z, z_k) \}, \quad z \in D,$$

$$W_\alpha(z, \zeta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(1 + k)} \left\{ (\bar{\zeta}z)^k \int_{|\zeta|}^1 \frac{(1-x)^{\alpha}}{x^{k+1}} dx - \left(\frac{z}{\zeta} \right)^k \int_0^{|\zeta|} (1-x)^{\alpha} x^{k-1} dx \right\},$$

$z, \zeta \in D$

При этом B_α сходится лишь при условии (2).

В дальнейшем в работах автора (5,6) был рассмотрен вопрос о принадлежности факторов π_α^f и $\exp g_\alpha^f$ классу A_α^* при $f \in A_\alpha^*$, здесь $\exp g_\alpha^f$ второй множитель в представлении (1). Оказалось, что существуют функции $f \in A_\alpha^*$, для которых $\pi_\alpha^f \in A_\alpha^*$, $\exp g_\alpha^f \in A_\alpha^*$. На основе этого и теоремы А была получена

Теорема В. Класс A_α^* совпадает с классом функций f , допускающих представление

$$f(z) = C_\lambda z^\lambda \pi_\beta(z, z_k) \exp \left\{ \int_D \frac{(1 - |\zeta|^2)^\beta}{(1 - \bar{\zeta}z)^{\beta+1}} d\mu(\zeta) \right\}, \quad (\beta > \alpha - 1, z \in D), \quad (4)$$

где $\{z_k\}_1^\infty$ — произвольная последовательность из единичного круга, подчиненная ограничению (2), μ — произвольная комплекснозначная борелевская мера на G , для которой

$$\int_D (1 - |\zeta|)^{\alpha-1} |d\mu(\zeta)| < +\infty. \quad (5)$$

В связи с теоремой В возникает вопрос о справедливости аналога этой теоремы для классов A_α^* . В теореме 1 дается полный ответ на этот вопрос. Кроме того, очевидно, что $A_\alpha^* \subset A_\alpha$, $\alpha > 0$. Указанное включение строгое. Как заметил М. М. Джрбашян, функция $S_\alpha(z) = \exp \left\{ \frac{1}{(1-z)^{\alpha+1}} \right\}$ принадлежит классу A_α , но не принадлежит A_α^* .

В теореме 2 дается полная характеристика тех ψ , конечных вариаций на $[-\pi, \pi]$, для которых функция

$$S_\psi(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{2}{(1 - e^{-i\theta} z)^{\alpha+1}} - 1 \right) d\psi(\theta) \right\}, \quad z \in D$$

принадлежит классу A_α^* , и тем самым, в известном смысле, указывается зазор, существующий между A_α^* и A_α .

Для формулировки основных результатов заметки приведем следующее

Определение (см. (7)). Пусть $\alpha > 0$, скажем, что $\psi \in L^1(\Gamma)$ принадлежит классу $\Lambda_{\alpha}^{p,q}$, если

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\psi^{(k)}(e^{i(\theta+t)}) - 2\psi^{(k)}(e^{i\theta}) + \psi^{(k)}(e^{i(\theta-t)})|^p d\theta \right)^{q/p} \frac{dt}{|t|^{1+q(\alpha-k)}} < +\infty$$

где $k = [\alpha]$.

Теорема 1. Следующие утверждения равносильны:

1) $f \in A_{\alpha}^*$;

2) f допускает в D представление

$$f(z) = C_{\lambda} z^{\lambda} \pi'_{\beta}(z, z_k) \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\psi(e^{i\theta}) d\theta}{(1 - e^{i\theta} z)^{\beta+1}} \right\}, \quad \beta > \alpha - 1, \quad z \in D.$$

Здесь C_{λ} — комплексное число, λ — целое неотрицательное число, $\{z_k\}_1$ — любая последовательность из D , подчиненная условию (2), ψ — произвольная функция из $\Lambda_{\alpha}^{1,1}$.

Доказательство теоремы основано на нескольких вспомогательных утверждениях. Следующая лемма в случае полуплоскости установлена в (7).

Лемма 1. Пусть u гармоническая в D функция такая, что

$$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (1-\rho)^{1-\alpha} \left| \frac{\partial^2 u(\rho e^{i\varphi})}{\partial \rho^2} \right| \rho d\rho d\varphi < +\infty, \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (6)$$

Тогда почти всюду существует предел

$$\lim_{\rho \rightarrow 1-0} u(\rho e^{i\varphi}) = \psi(e^{i\varphi}),$$

причем $\psi \in \Lambda_{\alpha}^{1,1}$. И обратно, если $\psi \in \Lambda_{\alpha}^{1,1}$, то интеграл Пуассона от функции ψ удовлетворяет оценке (6).

Пусть $\psi \in \Lambda_{\alpha}^{1,1}$, $\alpha > 0$. Обозначим через $\bar{\psi}$ сопряженную с ψ функцию, т. е.

$$\bar{\psi}(e^{i\theta}) = -i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\psi(e^{i(\theta+t)}) - \psi(e^{i(\theta-t)})}{2tg \frac{t}{2}} dt.$$

Лемма 2. Если $\psi \in \Lambda_{\alpha}^{1,1}$, то $\bar{\psi} \in \Lambda_{\alpha}^{1,1}$.

Доказательство этого утверждения нетрудно вывести из леммы 1 и следующего элементарного представления: если $f(z) = u(z) + iv(z)$ голоморфна в D , то

$$zf'(z) + z^2 f''(z) = \rho(1-i) \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}(z) + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}(z) \right), \quad z = \rho e^{i\varphi}.$$

Указанный подход позволяет установить аналогичное утверждение для всех классов $\Lambda_{\alpha}^{p,q}$, $p, q \geq 1$, $\alpha > 0$. Учитывая вид произведе-

ния Джрбазяна π_j^β при целых β (см. (2)), из теоремы 1 непосредственно следует

Теорема 2. Класс A_β^* совпадает с классом функций f , допускающих в D представление

$$f(z) = C_\beta z^\beta \prod_1^{+\infty} \frac{\bar{z}_k(z_k - z)}{1 - \bar{z}_k z} \exp \left\{ \sum_1^p \frac{1}{m} \left(\frac{1 - |z_k|^2}{1 - \bar{z}_k z} \right)^m \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\psi(e^{i\theta}) d\theta}{(1 - e^{-i\theta} z)^{p+1}} \right\} \right\}, \quad z \in D,$$

где p — целое число: $p \geq |\beta| + 1$, $\{z_k\}_1^{+\infty}$ — произвольная последовательность из D , удовлетворяющая условию (2), ψ — любая функция из класса $\Lambda_{p-\beta}^{1,1}$.

Следующая теорема позволяет получить полную характеристику тех функций ψ конечной вариации на $[-\pi, \pi]$, для которых S_β принадлежит классу A_β^* .

Теорема 3. Следующие утверждения равносильны:

1) Функция

$$S_\beta(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{2}{(1 - e^{-i\theta} z)^{\beta+1}} - 1 \right) d\psi(\theta) \right\}, \quad z \in D$$

принадлежит классу A_β^* ;

2) ψ удовлетворяет условию

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\psi(e^{i(\theta+t)}) - 2\psi(e^{i\theta}) + \psi(e^{i(\theta-t)})|^2}{|t|^2} dt d\theta < +\infty$$

т. е. $\psi \in \Lambda_\beta^{1,1}$.

Из теоремы 2 следует, что если функция $\exp f$ принадлежит A_β^* , то этому классу принадлежит также функция $\exp if$. Пример

функции $S_\beta(z) = \exp \left\{ \frac{1}{(1-z)^{\beta+1}} \right\}$ указывает, что A_β не обладает этим

свойством. Естественно возникает вопрос о полной характеристике тех f , для которых наряду с функцией $\exp f$ классу A_β принадлежит также $\exp if$.

Теорема 4. Пусть ψ — вещественнозначная функция конечной вариации на $[-\pi, \pi]$. Тогда следующие утверждения равносильны:

$$1) \quad \tilde{S}_\psi(z) = \exp \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{2}{(1 - e^{-i\theta} z)^{\beta+1}} - 1 \right) d\psi(\theta)$$

принадлежит классу A_β ;

2) ψ абсолютно непрерывна, а ψ' допускает представление

$$\psi' = \operatorname{Re} f, \quad f \in H^1$$

Здесь H^1 — известный класс Харди в D .

Институт математики

Академии наук Армянской ССР

Ереванский государственный университет

ՆԵԼԱՆԻԻՆԵԱ-ՋՐԲԱՇՅԱՆԻ դասերի պարամետրական ներկայացման մասին

Հոդվածում կառուցված է միավոր շրջանում անալիտիկ այն ֆունկցիաների պարամետրական տեսքը, որոնց համար

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 (1-r)^{-1} |y + |f(re^{i\theta})|| r dr d\theta < +\infty.$$

Ստացված պարամետրական ներկայացման մեջ էական դեր են կատարում միավոր շրջանագծի վրա տրված 0. Բեսովի հայտնի դասերը:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ М. М. Джрбашян, ДАН АрмССР, т. 3, № 1 (1945). ² М. М. Джрбашян, Сообщ. Ин-та математики и механики АН АрмССР, вып. 2, с. 3—39 (1945). ³ М. М. Джрбашян, ДАН СССР, т. 157, № 5, с. 1024—1027 (1964). ⁴ Р. Неванlinna, Однозначные аналитические функции, Гостехиздат, М., 1941. ⁵ Ф. А. Шамоян, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 13, № 5—6, с. 405—321 (1978). ⁶ А. Е. Djrbashian, F. A. Shamolian, Topics in theory of A_p^{∞} spaces, Teubner—Texte 105, Leipzig, 1968. ⁷ Е. М. Стейн, Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, Мир, М., 1974.