ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Том 90 1990 № 2

УДК 529.3.01

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. М. Мхитарян, Мохамед Абдалла Ахмед Абду

О сравнении различных методов решения интегрального уравнения плоской контактной задачи теории упругости

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 31/VIII 1989)

В работе ([1]) приведены разные по своим аналитическим структурам формулы решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода с логарифмическим ядром, описывающего плоскую контактную задачу теории упругости, которые были получены методами теории логарифмического потенциала и ортогональных многочленов Чебышева, методом М. Г. Крейна и методом сингулярных интегральных уравнений. Там же был поставлен вопрос об идентичности этих различных на вид формул и было показано, что формулу решения упомянутого интегрального уравнения по методу сингулярных интегральных уравнений можно свести к формуле решения того же уравнения по методам логарифмического потенциала и ортогональных многочленов Чебышева. Эту же последнюю формулу можно получить также исходя из формул решения М. Г. Крейна, что и делается в настоящей статье.

1. В формуле (1.9) из ([1]), дающей решение обсуждаемого интегрального уравнения (1.1) (там же) в симметрическом случае, т. е. уравнения (1.3) (там же), без ограничения общности можем положить $a=1$. Далее в этой формуле (1.9) положим $f_*(x)=T_{2n}(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$, где $T_{2n}(x)$ — многочлены Чебышева первого рода, и последовательно вычислим фигурирующие в ней интегралы. Сначала вычислим интеграл

$$I_n(u)=\int_0^u \frac{T_{2n}(s)ds}{\sqrt{u^2-s^2}}=\int_0^1 \frac{T_{2n}(ut)dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad (s=ut;\ n=1, 2, \ldots).$$

Воспользовавшись формулой (([2]), с. 849, ф. 7.349)

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{-1/2}T_n(1-t^2y)dt=\frac{\pi}{2}[P_n(1-y)+P_{n-1}(1-y)],$$

а также формулой (([2]), с. 1050, ф. 8.961.8)

$$2P_n^{(-1,0)}(x)=P_n(x)-P_{n-1}(x),$$

где $P_n(x)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ — многочлены Лежандра, а $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ — многочлены Якоби, и обнаружив, что $T_{2n}(t)=T_n(2t^2-1)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, будем иметь

$$I_n(u)=\frac{\pi}{2}P_n^{(-1,0)}(2u^2-1)\quad (n=1,2,\ldots). \tag{1.1}$$

Отсюда находим

$$I_n^{(1)}=\frac{dI_n}{du}=\pi nuP_{n-1}^{(0,1)}(2u^2-1)\quad (n=1,2,\ldots). \tag{1.2}$$

Формула (1.2) дает возможность вычислить значение $J(1)$ в рассматриваемом частном случае $f(x)$, где $J(u)$—функция, входящая в формулу (1.9) из ([1]). Учитывая известную формулу (([3]), с. 171, ф. 3), получим

$$J(1)=2n\ln 2\quad (n=1,2,\ldots). \tag{1.3}$$

Далее положив

$$I_n^{(2)}(u)=\frac{d}{du}\left(u\frac{dI_n}{du}\right)=\frac{d}{du}\left[uI_n^{(1)}(u)\right]=I_n^{(1)}(u)+u\frac{dI_n^{(1)}}{du},$$

при помощи (1.1) и (1.2) будем иметь

$$I_n^{(2)}(u)=2\pi nuP_{n-1}^{(0,1)}(2u^2-1)+2\pi n(n+1)u^3P_{n-2}^{(1,2)}(2u^2-1),\quad (n=1,2,\ldots)$$

причем всегда считается, что $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=0$, если $n=-1,-2,\ldots$

Теперь положим

$$A_n(x)=\int_x^1\frac{I_n^{(2)}(u)du}{\sqrt{u^2-x^2}}=$$

$$=2\pi n\int_x^1\frac{uP_{n-1}^{(0,1)}(2u^2-1)du}{\sqrt{u^2-x^2}}+2\pi n(n+1)\int_x^1\frac{u^3P_{n-2}^{(1,2)}(2u^2-1)du}{\sqrt{u^2-x^2}}$$

и в этих интегралах сделаем замену переменных

$$\xi=2x^2-1,\qquad u^2=1-\frac{1}{2}(1-\xi)\tau\quad (0<\tau<1).$$

В результате простых преобразований придем к выражению

$$A_n(x)=\frac{\pi n}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\xi}\left[H_n(\xi)+\frac{n+1}{2}(1+\xi)G_n(\xi)+\right.$$

$$\left.+\frac{n+1}{2}(1-\xi)K_n(\xi)\right]\quad (\xi=2x^2-1;\ n=1,2,\ldots); \tag{1.4}$$

$$H_n(\xi)=\int_0^1(1-\tau)^{-1/2}P_{n-1}^{(0,1)}[1-(1-\xi)\tau]d\tau;\quad (n=1,2,\ldots)$$

$$G_n(\xi)=\int_0^1(1-\tau)^{-1/2}P_{n-2}^{(1,2)}[1-(1-\xi)\tau]d\tau;$$

$$K_n(\xi) = \int_0^1 (1-\tau)^{1/2} P_{n-2}^{(1,2)}[1-(1-\xi)\tau]\,d\tau.$$

Займемся вычислением последних интегралов. С этой целью воспользуемся известной формулой ([2], с. 856, ф. 7.392.1)

$$\int_0^1 \tau^{\lambda-1}(1-\tau)^{\mu-1} P_n^{(\alpha,\beta)}(1-\gamma\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}{n!\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\lambda+\mu)}\, {}_3F_2\left(-n,\ n+\alpha+\beta+1,\ \lambda;\ \alpha+1,\ \lambda+\mu;\ \frac{\gamma}{2}\right).$$

$$(\mathrm{Re}\,\lambda>0;\ \mathrm{Re}\,\mu>0) \tag{1.5}$$

где $\Gamma(x)$ - известная гамма-функция Эйлера, а

$${}_3F_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\ \beta_1,\beta_2;\ z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_m(\alpha_2)_m(\alpha_3)_m}{(\beta_1)_m(\beta_2)_m m!} z^m \left((\alpha)_m = \frac{\Gamma(\alpha+m)}{\Gamma(\alpha)}\right) \tag{1.6}$$

обобщенный гипергеометрический ряд ([4]).

В случае функции $H_n(\xi)$ в (1.5) положим $\lambda=1$, $\mu=1/2$, $\alpha=0$, $\beta=1$, $\gamma=1-\xi$ и $n\to n-1$. Получим

$$H_n(\xi) = 2\,{}_3F_2\left(-n+1,\ n+1,\ 1;\ 1,\ \frac{3}{2};\ \frac{1-\xi}{2}\right) = 2F\left(-n+1,\ n+1;\ \frac{3}{2};\ \frac{1-\xi}{2}\right),$$

где $F(\alpha,\beta;\gamma;z)$—известная гипергеометрическая функция Гаусса. Таким образом, в разбираемом частном случае обобщенный гипергеометрический ряд ${}_3F_2$ вырождается в обычный гипергеометрический ряд F. Далее, используя известную формулу из ([3]) (с. 172, ф. (16)), будем иметь

$$H_n(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}(n-1)!}{\Gamma(n+1/2)} P_{n-1}^{(1/2,1/2)}(\xi) \quad (n=1,2,\ldots). \tag{1.7}$$

Обращаясь теперь к функции $G_n(\xi)$, в (1.5) положим $\lambda=1$, $\mu=-1/2$, $\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=1-\xi$, $n\to n-2$, что даст

$$G_n(\xi) = 2(n-1)\,{}_3F_2\left(-n+2,\ n+2,\ 1;\ 2,\ \frac{3}{2};\ \frac{1-\xi}{2}\right) \quad (n=1,2\ldots). \tag{1.8}$$

С другой стороны, если положить

$$h_n(z) = z\,{}_3F_2\left(-n+2,\ n+2,\ 1;\ 2,\ \frac{3}{2};\ z\right) \quad (z=(1-\xi)/2),$$

то при помощи (1.6) легко показать, что

$$\frac{dh_n}{dz} = F\left(-n+2,\ n+2;\ \frac{3}{2};\ z\right) \quad (n=2,3,\ldots).$$

Опять воспользовавшись указанной выше формулой (([3]), с. 172, ф. (16)), обнаружим, что

$$\frac{dh_n}{dz} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n-1)}{2\Gamma(n-1/2)} P_{n-2}^{(1/2,5/2)}(1-2z) \quad (n=2,3,\ldots)$$

Отсюда

$$h_n(z)=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n-1)}{2\Gamma(n-1/2)}\int P_{n-2}^{(1/2,5/2)}(1-2z)\,dz+C.$$

Если в последнем интеграле положить $1-2z=\tau$ и воспользоваться известной формулой ([3], с. 172, ф. (17)) то получим

$$h_n(z)=-\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n-1)}{2\Gamma(n-1/2)(n+1)}P_{n-1}^{(-1/2,3/2)}(1-2z)+C. \tag{1.9}$$

Так как $h_n(0)=0$, то отсюда $C=1/2\,(n^2-1)$. Теперь с учетом (1.8) и (1.9) окончательно будем иметь

$$G_n(\xi)=-\frac{2\sqrt{\pi}(n-1)!}{\Gamma(n-1/2)(n+1)(1-\xi)}P_{n-1}^{(-1/2,3/2)}(\xi)+\frac{2}{(n+1)(1-\xi)}. \tag{1.10}$$

Наконец, вполне аналогичным путем получим

$$K_n(\xi)=-\frac{\sqrt{\pi}(n-1)!}{\Gamma(n+1/2)(n+1)(1-\xi)}P_{n-1}^{(1/2,1/2)}(\xi)+\frac{2}{(n+1)(1-\xi)}. \tag{1.11}$$

Далее, подставляя (1.7), (1.10)—(1.11) в формулу (1.4), после элементарных преобразований находим

$$A_n(x)=\frac{\pi\sqrt{\pi}n!}{\sqrt{2}\Gamma(n-1/2)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\xi}}\left|\frac{1-\xi}{2n-1}P_{n-1}^{(1/2,1/2)}(\xi)-\right. \tag{1.12}$$

$$\left.-(1+\xi)P_{n-1}^{(-1/2,3/2)}(\xi)\right|+\frac{\pi n\sqrt{2}}{\sqrt{1-\xi}}\quad(\xi=2x^2-1,\ n=1,2,\ldots).$$

Теперь в формулах ([3], с. 177)

$$P_n^{(\lambda-1/2,-1/2)}(2x^2-1)=\frac{\Gamma(n+1/2)\Gamma(\lambda)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+\lambda)}C_{2n}^{\lambda}(x);\quad(n=0,1,2,\ldots)$$

$$P_n^{(\lambda-1/2,1/2)}(2x^2-1)=\frac{\Gamma(n+3/2)\Gamma(\lambda)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+\lambda+1)x}C_{2n+1}^{\lambda}(x);$$

где $C_n^{\lambda}(x)$—известные многочлены Гегенбауэра, совершим предельный переход $\lambda\to 0$ и учтем, что ([2], с. 1044 ф.8.934.4)

$$\lim_{\lambda\to 0}\Gamma(\lambda)C_n^{\lambda}(x)=\frac{2}{n}T_n(x)\quad(n=1,2,\ldots). \tag{1.13}$$

В результате получим

$$P_n^{(-1/2,-1/2)}(2x^2-1)=\frac{\Gamma(n+1/2)}{\sqrt{\pi}n!}T_{2n}(x);\quad(n=0,1,2,\ldots) \tag{1.14}$$

$$P_n^{(-1/2,1/2)}(2x^2-1)=\frac{2\Gamma(n+3/2)}{\sqrt{\pi}(2n+1)n!x}T_{2n+1}(x).$$

Далее, учитывая (1.14), можем записать

$$L_n(\xi)=\frac{1-\xi}{2n-1}P_{n-1}^{(1/2,1/2)}(\xi)-(1+\xi)P_{n-1}^{(-1/2,3/2)}(\xi)=$$

$$
= \frac{2(1-\xi)}{n(2n-1)} \frac{d}{d\xi}\left[P_n^{(-1/2,-1/2)}(\xi)\right] - \frac{2(1+\xi)}{n} \frac{d}{d\xi}\left[P_n^{(-3/2,1/2)}(\xi)\right] =
$$

$$
= \frac{2(1-x^2)}{x} \frac{\Gamma(n+1/2)}{\sqrt{\pi}(2n-1)n!} U_{2n-1}(x) - \frac{x}{n} \frac{d}{dx}\left\{\frac{\Gamma(n+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n)x} \times\right.
$$

$$
\left. \times \left[\lim_{\lambda \to -1} \Gamma(\lambda) C_{2n+1}^{\lambda}(x)\right]\right\} \quad (n=1,\ 2,\ \ldots).
$$

С другой стороны, при помощи (1.13) легко показать, что

$$
\lim_{\lambda \to -1} \Gamma(\lambda) C_{2n+1}^{\lambda}(x) = \frac{1}{n}\left[\frac{T_{2n+1}(x)}{2n+1} - \frac{T_{2n-1}(x)}{2n-1}\right] \quad (n=1,\ 2,\ \ldots).
$$

В результате после несложных преобразований

$$
L_n(\xi) = L_n(2x^2-1) = -\frac{4\Gamma(n+1/2)}{\sqrt{\pi}(2n-1)\Gamma(n)} T_{2n}(x) \quad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{1.15}
$$

Теперь сопоставление (1.15) с (1.12) окончательно даст

$$
A_n(x) = \frac{\pi n(1-T_{2n}(x))}{\sqrt{1-x^2}} \quad (n=1,\ 2,\ \ldots),
$$

и, следовательно, приняв во внимание (1.3), по формуле (1.9) из ([1]) получим

$$
p_+(x) = \frac{2nT_{2n}(x)}{\pi\sqrt{1-x^2}} \quad (0<x<1,\ n=1,\ 2,\ \ldots),
$$

что эквивалентно спектральному соотношению

$$
\int_{-1}^{1} \ln\frac{1}{|x-s|} \cdot \frac{T_{2n}(s)ds}{\sqrt{1-s^2}} = \frac{\pi}{2n} T_{2n}(x) \ (|x|<1,\ n=1,\ 2,\ \ldots).
$$

Последнее совпадает с (1.14) из ([1]) при четных индексах ($n \to 2n$) и при $a=1$.

Вполне аналогичным путем исходя из формулы (1.1) работы ([2]) и полагая $a=1$, $f_-(x)=T_{2n-1}(x)$, получим (1.14) из ([1]) при нечетных индексах ($n \to 2n-1$).

Таким образом, исходя из формул М. Г. Крейна (1.9)—(1.10) и (1.6), приведенных в работе ([1]), можно получить спектральные соотношения (1.14), которые также приведены в ([1]).

2. Теперь в только что указанных формулах М. Г. Крейна, как в ([1]), положим

$$
f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x/a) \qquad (|x|<a),
$$

предполагая ([1]), что $f(x) \in C_1[-a,a]$, а вторая производная $f''(x)$ в интервале $(-a,a)$ удовлетворяет условиям Дирихле. Если учесть, что в соответствии со структурой интегрального уравнения (1.1) из ([1]) следует функцию $f(x)$ заменить на $f(x)+C$ и принять во внимание первое условие (1.2) опять из ([1]), то на основании изложенных выше результатов снова придем к формуле

$$p(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}\left[P + \sum_{n=1} n a_n T_n(x/a)\right] \quad (|x|<a),$$

совпадающей с формулой (1.15) работы ([1]), что и требовалось показать.

Институт механики Академии наук Армянской ССР
Ереванский государственный университет

Ս. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ, ՄՈՀԱՄԵԴ ԱԲԴԱԼԱ ԱՀՄԵԴ ԱԲԴՈՒ

Առաձգականության տեսության հարթ կոնտակտային խնդրի ինտեգրալ հավասարման լուծման տարբեր մեթոդների համեմատման մասին

Ներկա աշխատանքում, որը նախորդ աշխատանքի շարունակությունն է, առաձգականության տեսության հարթ կոնտակտային խնդիրը նկարագրող լոգարիթմական կորիզով Ֆրեդհոլմի առաջին սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծումը՝ արտահայտված Մ. Գ. Կրեյնի մեթոդով ինտեգրալների միջոցով, ձևափոխվում է նույն հավասարման լուծմանը՝ արտահայտված Չեբիշևի օրթոգոնալ բազմանդամների մեթոդով անվերջ շարքի միջոցով։ Այդ բանաձևերի մեկից մյուսին անցումը ցույց տալու համար օգտագործվում են լոգարիթմական սիմետրիկ կորիզով առաջին սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծման Մ. Գ. Կրեյնի բանաձևերը, երբ հավասարման աջ մասը վերցվում է զույգ կամ կենտ ինդեքսով՝ Չեբիշևի առաջին սեռի բազմանդամի տեսքով։ Արդյունքում ստացվում են Չեբիշևի բազմանդամներ պարունակող լոգարիթմական սիմետրիկ կորիզով հայտնի սպեկտրալ առնչությունները, որոնց օգնությամբ էլ ցույց է տրվում նշված անցումը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. М. Мхитарян, Мохамед Абдалла Ахмед Абду.* ДАН АрмССР, т. 89, № 3 (1989). [2] *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик,* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Наука, М., 1971. [3] *Г. Бейтмен, А. Эрдейи,* Высшие трансцендентные функции. Т. 2, Наука, М., 1974. [4] *Г. Бейтмен, А. Эрдейи,* Высшие трансцендентные функции. Т. 1, Наука, М., 1973.