ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Том 90 1990 №2

УДК 539.3

МЕХАНИКА

М. В. Белубекян

О распространении упругих сдвиговых волн вдоль периодически неровной поверхности

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР В. С. Саркисяном 14/XI 1989)

В работе ([1]) подробно рассматриваются вопросы применения устройств, основанных на распространении акустических волн при наличии периодического рельефа на поверхности, и дан обзор исследований в этом направлении. В настоящей статье приводятся решения для задачи распространения чисто сдвиговых волн в полупространстве с периодическими слабыми неровностями. Постановка и подход к решению задачи в основном соответствуют работе ([2]). Предлагается способ решения задачи в случае произвольной (не слабой) неровности.

1. В прямоугольной системе координат (x_1, x_2, x_3) поверхность $x_2=f(x_1)$ является границей раздела упругое тело—вакуум. Ось ox_2 направлена во внутрь упругого тела. Рассматривается задача антиплоской деформации, т. е.

$$u_1=0,\quad u_2=0,\quad u_3=u(x_1, x_2, t),$$

где u_1, u_2, u_3—упругие перемещения в соответствующих направлениях. В этом случае уравнение движения в перемещениях имеет следующий вид:

$$c_t^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{1.1}$$

На поверхности раздела должно выполняться условие свободной от нагрузки поверхности.

$$\bar{\sigma}_i\cdot\bar{n}=0 \quad \text{при} \quad x_2=f(x_1), \tag{1.2}$$

где $\bar{\sigma}_i=\sigma_{i1}\hat{i}_1+\sigma_{i2}\hat{i}_2+\sigma_{i3}\hat{i}_3$ $(i=1, 2, 3)$; $\hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3$—единичные векторы по направлению осей x_1, x_2, x_3, $\bar{n}$—нормаль к поверхности $x_2=f(x_1)$. Для данной поверхности

$$\bar{n}=\mathrm{grad}[x_2-f(x_1)]\cdot|\mathrm{grad}[x_2-f(x_1)]|^{-1}. \tag{1.3}$$

Из (1.2) и (1.3) для рассматриваемой антиплоской задачи получается следующее граничное условие:

$$\sigma_{23}-\frac{df}{dx_1}\sigma_{31}=0 \quad \text{при} \quad x_2=f(x_1). \tag{1.4}$$

В дальнейшем предполагается, что

$$f(x_1)=a\cos\lambda_2 x_1,\quad \lambda_2=2\pi/l. \tag{1.5}$$

После замены напряжений через перемещение условие (1.4) записывается в форме

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}+2\varepsilon\sin\lambda_2 x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}=0 \text{ при } x_2=a\cos\lambda_2 x_1,\quad \varepsilon=\pi a/l. \tag{1.6}$$

2. В предположении малости ε (слабая неровность) граничное условие (1.6)—случай произвольной неровности заменяется условием [2]

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}+2\varepsilon\sin\lambda_2 x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}=0 \text{ при } x_2=0. \tag{2.1}$$

Тогда уравнение (1.1) при граничном условии (2.1) допускает следующее решение:

$$u=\exp(i\omega t)\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x_2)\sin\lambda_n x_1,\quad \lambda_n=n\pi/l. \tag{2.2}$$

Подстановка (2.2) в уравнение (1.1) приводит к следующим уравнениям, определяющим функции:

$$\psi_n''(x_2)-(\lambda_n^2-\omega^2c_t^{-2})\psi_n(x_2)=0. \tag{2.3}$$

Подставляя (2.2) в граничное условие (2.1), используя тождества

$$2\cos\lambda_n x_1\sin\lambda_2 x_1=\sin\lambda_{n+2}x_1-\sin\lambda_{n-2}x_1 \tag{2.4}$$

и приравнивая коэффициенты при $\sin\lambda_n x_1$, получим следующие граничные условия:

$$\varepsilon\lambda_{n-2}\psi_{n-2}(0)+\psi_n'(0)-\varepsilon\lambda_{n+2}\psi_{n+2}(0)=0. \tag{2.5}$$

В (2.5) принято обозначение $\psi_{-k}=-\psi_k$.

Рассмотрим случай, когда

$$\omega^2c_t^{-2}<\lambda_1^2, \tag{2.6}$$

т. е. длина упругой волны больше полудлины волны на поверхности. При условии (2.6) уравнения (2.3) имеют решения вида

$$\psi_n(x_2)=c_n\exp(-\lambda_n\sqrt{1-\eta_n^2}\,x_2),\quad \eta_n^2=\omega^2c_t^{-2}\lambda_n^{-2}. \tag{2.7}$$

Подставляя из (2.7) значения $\psi_n(0)$ и $\psi_n'(0)$ в уравнения (2.5), получим бесконечную систему однородных линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов c_n. Приравнивая детерминант указанной системы нулю, находим дисперсионное уравнение задачи. Известно, и это можно легко показать и здесь, что дисперсионное уравнение имеет следующее приближенное решение [1,2]:

$$\omega^2\approx\lambda_1^2c_t^2(1-\varepsilon^2). \tag{2.8}$$

Смысл приближения заключается в том, что бесконечная система уравнений обрывается и рассматривается конечное число уравнений с соответствующим числом неизвестных c_n. В частности, для первой формы волны получается выражение

$$u^{(1)} = c_1 \exp(i\omega t - \varepsilon\lambda_1 x_2)\sin\lambda_1 x_1; \tag{2.9}$$

где ω определяется из (2.8).

Отсюда делается вывод, что наличие периодически слабой неровности на поверхности приводит к появлению поверхностных волн. Однако остается неясным соответствие приближенностей граничного условия (2.1) и формулы (2.8).

Можно показать также, что поверхностная волна при условиях

$$\lambda_n^2 \leq \omega^2 c_t^{-2} < \lambda_{n+1}^2$$

не существует.

Аналогичные результаты получаются также, если решение приведенной в этом пункте задачи представить в виде

$$u = \exp(i\omega t)\left[\varphi_0(x_2) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_2)\cos\lambda_n x_1\right].$$

3. Обратимся к решению задачи в случае точного граничного условия (1.6). Преобразованием координат

$$\xi = x_1, \quad \eta = x_2 - a\cos\lambda_2 x_1$$

уравнение (1.1) и граничное условие (1.6) приводятся к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + 4\varepsilon\sin\lambda_2\xi\,\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + (1 + 4\varepsilon^2\sin^2\lambda_2\xi)\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + 2\varepsilon\lambda_2\cos\lambda_2\xi\,\frac{\partial u}{\partial\eta} = \frac{1}{c_t^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{3.2}$$

$$(1 + 4\varepsilon^2\sin^2\lambda_2\xi)\frac{\partial u}{\partial\eta} + 2\varepsilon\sin\lambda_2\xi\,\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0. \tag{3.3}$$

Уравнение (3.2) с граничным условием (3.3) допускает решение следующего вида:

$$u = \exp(i\omega t)\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(\eta)\sin\lambda_n\xi. \tag{3.4}$$

Подстановка (3.4) в уравнение (3.2) и использование тождеств типа (2.4) приводит к следующей бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(1+2\varepsilon^2)\psi_n''(\eta) - (\lambda_n^2 - \omega^2 c_t^{-2})\psi_n(\eta) + 2\varepsilon\lambda_n[\psi'_{n-2}(\eta) - \\ - \psi'_{n+2}(\eta)] - \varepsilon^2[\psi''_{n-4}(\eta) + \psi''_{n+4}(\eta)] = 0. \tag{3.5}$$

Здесь, как и ранее, принято обозначение $\psi_{-k} = -\psi_k$.

Аналогично получаем граничные условия

$$(1+2\varepsilon^2)\psi'_n(0) - \varepsilon^2[\psi'_{n-4}(0) + \psi'_{n+4}(0)] + \varepsilon[\lambda_{n-2}\psi_{n-2}(0) - \lambda_{n+2}\psi_{n+2}(0)] = 0. \tag{3.6}$$

Рассматривая для системы уравнений (3.5) и для граничных условий (3.6) то же приближение, что и в предыдущем пункте, получим следующее приближенное решение для дисперсионного уравнения:

$$\omega^2 \approx \lambda_1^2 c_t^2 (1+2\varepsilon^2)^{-1}(1+\varepsilon^2). \tag{3.7}$$

Для первой формы волны получается выражение

$$u^{(1)}=c_1\exp\left(i\omega t-\frac{\varepsilon\lambda_1}{1+2\varepsilon^2}x_2+\frac{\varepsilon^2}{1+2\varepsilon^2}\cos\lambda_1 x_1\right)\sin\lambda_1 x_1, \tag{3.8}$$

где ω определяется согласно (3.7).

Сравнение формулы (3.6) при малых ε с формулой (2.8) дает различие при определении скорости поверхностной волны. Однако, как показывают формулы (2.9) и (3.8), глубины затухания волн не различаются.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Մ. Վ. ԲԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ

Պարբերական անհարթ մակերևույթով սահքի ալիքների տարածման մասին

Նախկինում խնդիրը ուսումնասիրված էր այն դեպքում, երբ ազատ մակերևույթի եզրային պայմանը բավարարվում է փոքր անհարթությունների մոտավորությամբ։ Հոդվածում դիտարկված է ճշգրիտ եզրային պայմանի դեպքը։ Ցույց է տրված, որ պարբերական անհարթությունները հանդիսանում են սահքի մակերևութային ալիքների առաջացման պատճառ։ Ուսումնասիրված է անհարթության ազդեցությունը մակերևութային ալիքի տարածման արագության վրա։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ю. В. Гуляев, В. П. Поесский*, УФН, т. 157, вып. 1, с. 85—127 (1989). [2] *В. М. Яковенко*, Укр. физ. журн., № 9, с. 1424—1425, 1982.