УДК 512.27

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

В. К. Брутян

Преобразование сложной системы в полностью управляемую и наблюдаемую подсистемы

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 23/1 1990)

Введение. В настоящее время процесс алгебраизации теории управления имеет большое практическое значение (1-3). Теоретическое значение этого процесса состоит в том, что с помощью алгебраических методов удастся описать точное решение задачи синтеза системы управления, причем сама структура системы получается в результате решения задачи без каких-либо упрощений интуитивного порядка (4-7). В данной статье предлагается метод эквивалентного преобразования автоматической системы в особенно удобную форму полностью управляемой и полностью наблюдаемой подсистемы. Приводятся условия для эквивалентного преобразования нестационарной системы. Подобный метод позволяет эффективно решать задачи синтеза в рамках сложных систем управления, поскольку при алгебраическом методе представляется естественным при описании задачи синтеза включить параметры, характеризующие неопределенность и неустойчивость переменных системы.

Постановка задачи. Рассмотрим автоматическую нестационарную систему, описываемую уравнениями (8)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A^1(t)x + D^1(t)u, & x(t_0) &= x_0, \\ y &= H^1(t)x, & t \in [t_0, T] &= I, \end{aligned} \quad (1)$$

где x — n -мерный непрерывный вектор состояния системы; u — r -мерный непрерывный вектор управления; y — m -мерный непрерывный вектор результатов наблюдений; $A^1(t)$, $D^1(t)$ и $H^1(t)$ — ограниченные и непрерывные $n \times n$, $n \times r$ и $m \times n$ -мерные матрицы на интервале I , элементы которых непрерывно дифференцируемы $n-2$, $n-1$ и $n-1$ раз, соответственно. По обозначению верхний индекс 1 матриц $A^1 = A^1(t)$, $D^1 = D^1(t)$ и $H^1 = H^1(t)$ соответствует процессу $x(t)$.

Из современной теории управления известно, что необходимым и достаточным условием полной управляемости (система может быть переведена из любого состояния $x(t_0)$ в любое состояние $x(T)$ при любом t_0 и любом $T > t_0$) является то, что матрица управляемости $P^1 = P^1(t)$ имеет ранг n в интервале I (8,9). Здесь предполагается, что критерий управляемости принимает форму. Пусть заданы матрицы системы $\{P_1^1, P_2^1, \dots, P_n^1\}$. Составим матрицу $P^1 = [P_1^1 P_2^1 \dots P_n^1]$, размеров $n \times nr$, первые r столбцов которой совпадают со столбцами

матрицы D^I , т. е. $P_i^I \rightarrow D^I$, а последние r столбцов матрицы P^I образованы матрицей $-A^I P_i^I + P_i^I$; т. е. $P_{i+1}^I = -A^I P_i^I + P_i^I$, $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Аналогично составляется матрица $R^I = R^I(t)$ полной наблюдаемости $R^I = [R_1^I R_2^I \dots R_n^I]$, где $R_1^I = H^I$, $R_{i+1}^I = R_i^I A^I + R_i^I$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, штрих означает транспонирование.

Требуется эквивалентным преобразованием исходную систему (1) привести к форме, где имеются полностью управляемая и полностью наблюдаемая подсистемы на интервале I . Эквивалентным преобразованием $Q = Q(t)$ является произвольная, вещественная, дифференцируемая и невырожденная матрица размера $n \times n$ такая, что подстановка $v = Qx$ в (1) приводит к уравнениям

$$\dot{v} = A^{II}v + D^{II}u, \quad v(t_0) = v_0,$$

$$y = H^{II}v,$$

где $A^{II} = [QA^I + \dot{Q}]Q^{-1}$, $D^{II} = QD^I$, $H^{II} = H^I Q^{-1}$.

Здесь следует заметить, что верхний индекс II матриц A^{II} , D^{II} и H^{II} определяет необходимую, т. е. требуемую структуру переменных $v(t)$ преобразованного состояния (см. ниже формулу (4)). Можно показать, что преобразованные матрицы полной управляемости и полной наблюдаемости определяются соотношениями

$$P^{II} = QP^I, \quad (2)$$

$$R^{II} = R^I Q^{-1}, \quad (3)$$

и так как матрица Q невырожденная, то $\text{ранг } P^{II} = \text{ранг } P^I$, $\text{ранг } R^{II} = \text{ранг } R^I$. Следовательно, при данном преобразовании полная управляемость и полная наблюдаемость не теряются.

Преобразование нестационарной системы к виду управляемой и наблюдаемой подсистемы. Требуется привести (1) к следующей форме

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \\ \dot{v}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{II} & a_{12}^{II} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^{II} & 0 & 0 \\ a_{31}^{II} & a_{32}^{II} & a_{33}^{II} & a_{34}^{II} \\ 0 & a_{42}^{II} & 0 & a_{44}^{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1^{II} \\ 0 \\ d_3^{II} \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad (4)$$

$$y = [h_1^{II} \ h_2^{II} \ 0 \ 0]v,$$

где элементы a_{ij} ($i, j = \overline{1; 4}$) сами являются матрицами, а компоненты d_i , h_i — векторы соответствующих размеров, v_i есть n_i -мерный вектор, причем подсистема

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{II} & 0 \\ a_{31}^{II} & a_{33}^{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1^{II} \\ d_3^{II} \end{bmatrix} u \quad (5)$$

имеет матрицу управляемости, для которой

$$\text{ранг} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{13} \\ P_{31} & P_{33} \end{bmatrix} = n_1 + n_3 = n,$$

а подсистема

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{11} & a_{12}^{11} \\ 0 & a_{22}^{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad y = [h_1^{11} \quad h_2^{11}] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

имеет матрицу наблюдаемости, для которой

$$\text{ранг} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = n_1 + n_2 < n.$$

Новая форма (4) обладает определенными преимуществами, так как подсистема (5) является полностью управляемой, а подсистема (6) полностью наблюдаемой. Из уравнений (4) следует, что переменные v_2 и v_4 не зависят от управлений, а результат наблюдений не зависит от переменных v_2 и v_4 . Это означает, что по переменным v_2 и v_4 система (4) неуправляема, а по переменным v_2 и v_4 ненаблюдаема.

Теорема. Автоматическая система (1) приводится к форме (4) с помощью преобразования Q тогда и только тогда, когда

а) матрица P^1 имеет ранг $(n_1 + n_2)$ и может быть представлена в виде

$$P^1 = \varphi_1 G_1 + \varphi_2 G_2,$$

а матрица R^1 имеет ранг $(n_1 + n_2)$ и может быть представлена в виде

$$R^1 = L_1 \psi_1 + L_2 \psi_2;$$

б) матрицы G_i и L_i определяются как

$$G_i = [g_{i1} \quad g_{i2} \quad g_{i3} \quad g_{i4}], \quad L_i = [l_{i1} \quad l_{i2} \quad l_{i3} \quad l_{i4}],$$

где g_{ij} и l_{ij} матрицы размеров $n_i \times n_j$ и $n_j \times n_i$, соответственно. Кроме того, матрицы ψ_i и φ_i — дифференцируемые матрицы размеров $n_i \times n$ и $n \times n_i$ ранга n_i , причем имеет место соотношение $\psi_i \varphi_j = \delta_{ij} I_{n_i}$, где δ_{ij} есть дельта-символ Кронекера, а I_{n_i} — единичная матрица размера $n_i \times n_i$, $i, j = \overline{1; 4}$.

в) удовлетворяются соотношения

$$\text{ранг} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = n_1 + n_2, \quad \text{ранг} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} = n_1 + n_2. \quad (7)$$

Доказательство теоремы приведено ниже.

Построение преобразующей матрицы Q . Процедуру построения матрицы преобразования Q можно сформулировать следующим образом.

1. Разложить на составляющие произведение $L_1 G_1 = R^1 P^1$ и определить матрицы G_1 и L_1 .

2. Решить уравнения $\psi_1 P^1 = G_1$ и $R^1 \varphi_1 = L_1$ относительно ψ_1 и φ_1 .

3. Разложить на составляющие равенства

$$P^1 - \varphi_1 G_1 = \varphi_2 G_2 \quad \text{и} \quad R^1 - L_1 \psi_1 = L_2 \psi_2$$

и определить из них L_2 , ψ_2 , φ_2 и G_2 .

4. Перейти от ψ_2 к φ_2 .

5. Найти матрицу φ_3 как совокупность из n_3 дифференцируемых столбцов, обеспечивая невырожденность матрицы $Q^{-1} = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3 \quad \varphi_4]$.

Пример. Привести к управляемой и наблюдаемой форме сис-

тому вида (1), где $a_{11}^1 = -2$, $a_{12}^1 = t-3$, $a_{13}^1 = -a_{14}^1 = -d_1^1 = -t$, $a_{11}^1 = t^2 - 3t + 1$, $a_{22}^1 = h_4^1 = -1$, $a_{24}^1 = -3$, $a_{32}^1 = d_2^1 = 2$, $a_{34}^1 = t^2 - 2t - 1$, $h_2^1 = t^2$, $a_{21}^1 = a_{13}^1 = a_{31}^1 = a_{32}^1 = a_{41}^1 = a_{42}^1 = a_{43}^1 = h_3^1 = h_4^1 = 0$. В этом случае имеем

$$P^1 = -2 \begin{bmatrix} -t/2 & 2,5 & 1/2 + 8 & 3t + 20 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R^1 = - \begin{bmatrix} 0 & -t^2 & 0 & 1 \\ 0 & t(t+2) & 0 & t(3t+1) \\ 0 & -t(t-4) - 2 & 0 & (3t+1)(t^2-3t+3) - 44 \\ 0 & t(t-6) + 6 & 0 & (t-1)(3t^2+t^2+25t+10) + 28 \end{bmatrix}.$$

Отсюда получим

$$L_1 = - \begin{bmatrix} -t^2 \\ t(t+2) \\ -t(t-4) - 2 \\ t(t-6) + 6 \end{bmatrix}, \quad G_1 = [2 \ 2 \ 2 \ 2].$$

Решая уравнения $\psi_1 P^1 = G_1$ и $R^1 \varphi_1 = L_1$, имеем

$$\psi_1 = \varphi_1 = [0 \ 1 \ 0 \ 0].$$

Разложение матриц $P^1 - \varphi_1 G_1$ и $R^1 - L_1 \psi_1$ приводит к следующим результатам $\psi_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$, $G_2 = -2[-t/2 \ 2,5 \ 1/2 + 8 \ 3t + 20]$,

$$L_2 = - \begin{bmatrix} 1 \\ t(3t+1) \\ (3t+1)(t^2-3t+3) - 44 \\ (t-1)(3t^2+t^2+25t+10) + 28 \end{bmatrix}, \quad \varphi_2 = [1 \ 0 \ 0 \ 0].$$

Тогда $\psi_3 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$; $\psi_4 = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$, а матрица Q определяется соотношением $Q' = [\psi_1' \ \psi_2' \ \psi_3' \ \psi_4']$. Используя матрицу

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

можно представить исходную автоматическую систему в форме (4).

Доказательство теоремы. 1. Доказательство достаточности. Матрицы R^1 и P^1 могут быть представлены в виде

$$R^1 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 & 0 \\ r_{31} & r_{32} & 0 & 0 \\ r_{41} & r_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix},$$

$$P^1 = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \varphi_3 \ \varphi_4] \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где ψ_3 и ψ_4 (или φ_3 и φ_4) — любая совокупность дифференцируемых строк (или столбцов), определяющих невырожденность матрицы $[\psi_1 \psi_2 \psi_3 \psi_4]$ (или матрицы $[\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4]$), также обеспечивающих выполнение равенства $\psi_i \varphi_j = \delta_{ij}$, $i, j = \overline{1, 4}$.

Пользуясь формулами преобразований (2) и (3), можно убедиться, что соотношения (8) представляют собой матрицы управляемости и наблюдаемости эквивалентной системы следующего вида

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A^{III}z + D^{III}u, \quad z(t_0) = z_0, \\ y &= H^{III}z, \end{aligned}$$

где

$$A^{III} = \begin{bmatrix} a_{11}^{III} & a_{12}^{III} & a_{13}^{III} & a_{14}^{III} \\ a_{21}^{III} & a_{22}^{III} & a_{23}^{III} & a_{24}^{III} \\ a_{31}^{III} & a_{32}^{III} & a_{33}^{III} & a_{34}^{III} \\ a_{41}^{III} & a_{42}^{III} & a_{43}^{III} & a_{44}^{III} \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}, \quad D^{III} = \begin{bmatrix} d_1^{III} \\ d_2^{III} \\ d_3^{III} \\ d_4^{III} \end{bmatrix}, \quad H^{III} = \begin{bmatrix} h_1^{III} \\ h_2^{III} \\ h_3^{III} \\ h_4^{III} \end{bmatrix}.$$

Здесь верхний индекс III определяет переменную $z(t)$ состояния системы. Обозначим j -тую совокупность r столбцов матрицы G как $G_i = [g_{i1} \ 0 \ g_{i3} \ 0]'$, а j -тую совокупность m строк матрицы L как $L_j = [l_{j1} \ l_{j2} \ 0 \ 0]$.

В результате можно записать

$$G_{i+1} = -A^{III}G_i + \dot{G}_i, \quad G_1 = D^{III}, \quad (9)$$

$$L_{i+1} = L_i A^{III} + \dot{L}_i, \quad L_1 = H^{III}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (10)$$

Из уравнений (8) и (9) соответственно получим

$$\begin{bmatrix} a_{21}^{III} & a_{23}^{III} \\ a_{41}^{III} & a_{43}^{III} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{13} \\ g_{31} & g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{13} \\ l_{21} & l_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{13}^{III} & a_{14}^{III} \\ a_{23}^{III} & a_{24}^{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, благодаря условиям (7) и непрерывности матрицы A^{III} , уравнение (9) обеспечивает преобразование системы (1) к форме (4). Что и требовалось доказать.

2. Доказательство необходимости. Пусть система (1) приведена к форме (4), где

$$p_i^{II} = \begin{bmatrix} d_1^{II} \\ 0 \\ d_3^{II} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11}^{II} \\ 0 \\ p_{13}^{II} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_i^{II} = \begin{bmatrix} p_{11}^{II} \\ 0 \\ p_{13}^{II} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{для } i = 2, 3, \dots, n.$$

Легко показать, что

$$p_{i+1}^{II} = - \begin{bmatrix} a_{11}^{II} & a_{12}^{II} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^{II} & 0 & 0 \\ a_{31}^{II} & a_{32}^{II} & a_{33}^{II} & a_{34}^{II} \\ 0 & a_{42}^{II} & 0 & a_{44}^{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11}^{II} \\ 0 \\ p_{13}^{II} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11}^{II} \\ 0 \\ p_{13}^{II} \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -a_{11}^{11}p_{11}^{11} + p_{11}^{11} & & & \\ 0 & & & \\ -a_{31}^{11}p_{11}^{11} - a_{33}^{11}p_{13}^{11} + p_{13}^{11} & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{i+1,1}^{11} & & & \\ 0 & & & \\ p_{i+1,3}^{11} & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \quad (11)$$

Тогда матрица P^{11} имеет вид

$$P^{11} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где матрицы P_{11} , P_{12} , P_{22} и P_{24} получаются на основе итерационного процесса (11) для $n_1 + n_2 \leq i < n$. Так как $\text{ранг} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = n_1 + n_2$, то такой же ранг имеют и матрицы P^{11} и P^1 (последнее на основании соотношения (2)). Далее, представим матрицу Q^{-1} в виде $[q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4]$. Тогда $P^1 = q_1 [P_{11} \ P_{12} \ P_{13} \ P_{14}] + q_2 [P_{21} \ P_{22} \ P_{23} \ P_{24}]$, что и требовалось доказать.

Аналогично можно представить и матрицу R^1 , для которой можно показать, что ее ранг равен $n_1 + n_2$.

Ереванский институт
народного хозяйства

Վ. Կ. ԲՐՈՒՅՅԱՆ

Ոչ ստացիոնար բարդ համակարգի ձևափոխումը լրիվ կառավարելի ու դիտարկելի համակարգերի

Աշխատանքում առաջարկվում է բարդ ավտոմատ համակարգը համարժեք լրիվ կառավարելի ու դիտարկելի ենթահամակարգերով ձևափոխելու մեթոդը: Բերվում են բարդ ոչ ստացիոնար համակարգի համարժեք ձևափոխման համար անհրաժեշտ ու բավարար պայմանները: Համարժեք ձևափոխման մեթոդը ցուցադրելու համար դիտարկված է կոնկրետ թվային օրինակ:

ЛИТЕРАТУРА—ԻՐԱՎԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ В. И. Зубов, Лекции по теории управления. Наука, М., 1985. ² В. К. Брутян, Основные аспекты теории непрерывных марковских управляемых систем и ее приложение. Айастан, Ереван, 1984. ³ В. Г. Флеминг, Р. В. Ришел, Детерминистическое и оптимальное уравнение. Наука, М., 1980. ⁴ В. К. Брутян, ДАН АрмССР, т. 77, № 3, с. 108—113. (1983). ⁵ В. К. Брутян, ДАН АрмССР, т. 77, № 5, с. 205—208 (1983). ⁶ В. К. Брутян, ДАН АрмССР, т. 89, № 3, с. 104—109. (1989). ⁷ В. К. Брутян, ДАН АрмССР, т. 72, № 4, с. 224—231 (1981). ⁸ В. С. Пугачев, И. Н. Ситицын, Стохастические дифференциальные системы, Наука, М., 1985. ⁹ М. Х. А. Дэвис, Линейное оценивание и стохастическое управление. Наука, М., 1984.