ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Том 90 1990 №2

УДК 519.61

МАТЕМАТИКА

Г. В. Агекян

Экономичный алгоритм решения интегрального уравнения с почти разностным ядром

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. Б. Нерсесяном 24/I 1990)

В работе [1] предложен новый алгоритм QR-факторизаци (ортогонального разложения) скалярных теплицевых матриц полного ранга сложности не более $9nm+\frac{27}{2}n^2$ (для $(m\times n)$ матрицы). В работе [2] этот алгоритм обобщен в случае блочных матриц малого теплицевого ранга. В случае $(m\times n)$-матрицы $(m\geqslant n)$ полного ранга с $(l\times l)$ блоками общего вида сложность этого алгоритма равна $9mnl+$ $+3n^2l+10mnkl+14n^2kl+8n^2k^2l$, где k есть теплицев ранг матрицы. Надо отметить, что для блочно-теплицевых матриц известны несколько менее трудоемкие алгоритмы обращения, однако несомненным (и иногда решающим) преимуществом алгоритмов работ [1,2] является освобождение от условий невырожденности главных миноров. Кроме того, последние алгоритмы дают возможность экономичного решения задачи наименьших квадратов $Ax\cong b$. Отметим, что для матриц малого теплицевого ранга прямое применение алгоритма работы [2] общего вида менее трудоемко, чем приведение матрицы малого теплицевого ранга к блочно-теплицевой матрице (с блоками $(k+l)\times(k+l)$, см. [3]) с применением алгоритма работы [2] при $k=0$.

В работе [3] с помощью предложенного алгоритма с высокой точностью решены интегральные уравнения на конечном отрезке с разностными ядрами.

В данной работе с помощью алгоритма [2] решено интегральное уравнение на конечном отрезке с „почти разностным" ядром. Отметим, что и в работе [3] и в данной работе для дискретизации интегрального уравнения применена квадратурная формула Гаусса [4]). Численный эксперимент проведен на ЭВМ-ЕС-10—35.

1. *Алгоритм решения задачи наименьших квадратов.* Пусть A—блочная матрица полного ранга, удовлетворяющая условию

$$A=\|a_{ij}\|;\ a_{ij}=a_{i-1,j-1}+\sum_{s=1}^{k}\lambda_{i-1}^{(s)}x_{j-1}^{(s)}, \tag{1}$$

где a_{ij}; $\lambda_i^{(s)}$; $x_j^{(s)}$—$(l\times l)$ матрицы; $i=1, 2, \ldots, m$; $j=1, 2, \ldots, n$; $n\leqslant m$; $k\ll n$.

Заметим, что если k есть минимально возможное число в представлении матрицы A, то в скалярном случае это — теплицев ранг матрицы A (см. ([2])). Обозначим: $E_l-(l\times l)$ единичная матрица, 0— нулевая матрица, Z_0—квадратная матрица следующего вида:

$$Z_0=\begin{vmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & E_l \\ E_l & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & E_l & 0 \end{vmatrix}$$

Z_1 и $Z=Z_1+Z_0$ есть $(m+2k(n-1))l\times(m+2k(n-1))l$ матрицы, где

$$Z_1(k(n-1)+1+i,\ m+2k(n-1)-(j-1)n)=\begin{cases}\lambda_i^{(j)} & \text{при } i=1,2,\dots,m-1; \\ & j=1,2,\dots,k \\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Отметим, что если $\lambda_i^{(s)},\ x_i^{(s)}=0$ для любого i и s, то нужно принять $k=1$. Далее обозначим:

$$W=\mathrm{diag}[\overbrace{0,\dots,0}^{k(n-1)l},\ \overbrace{1,\dots,1}^{ml},\ \overbrace{0,\dots,0}^{k(n-1)l}]$$

$$\lambda^{(j)}=[\overbrace{0,\dots,0}^{k(n-1)l},\ \lambda_1^{(j)T},\ \lambda_2^{(j)T},\ \dots,\ \lambda_{m-1}^{(j)T},\ \overbrace{0,\dots,0}^{lk(n-1)+l}]^T;\ j=1,2,\dots,k$$

$$t=[x_{n-1}^{(2)T},\ \dots,\ x_{n-1}^{(k)T},\ a_{1n}^T,\ \dots,\ a_{12}^T,\ a_{11}^T,\ \dots,\ a_{m1}^T,\ x_{n-1}^{(k)T},\ \dots,$$

$$x_1^{(k)T},\ \dots,\ x_{n-1}^{(k)T},\ \dots,\ x_1^{(k)T}]^T;\quad x^*Wy=[x,y].$$

В этих обозначениях алгоритм решения задачи наименьших квадратов $Ax_0\cong b_0$ выглядит следующим образом (доказательство см. в ([8])).

: *INITIALIZATIONS*:

$q_1=t;\ L=t;\ \hat{q}=q_1;$

$p_1=[E_l,0,\dots,0]^T;\ \hat{p}=p_1;$

$f=b=c^{(p)}=d^{(p)}=0;\ \Phi=\beta=\Phi^{(p)}=\beta^{(p)}=0;\ p=1,2,\dots,k;$

$x=[q_1,q_1]^{-1};\ x_{p\mu}=[\lambda^{(p)},\lambda^{(\mu)}];\ p,\mu=1,2,\dots,k;$

$a=[q^T_{k(n-1)+1,1},\ q^T_{k(n-1)+2,1},\ \dots,\ q^T_{k(n-1)+m,1}];$

$x_0=p_1xab_0;$

: *MAIN LOOP*:

For $j=2$ *TO* n *DO*

BEGIN

$y=-[q_1,Zq_{j-1}];\ v=q_{m+k(n-1),j-1};$

$u=-q_{k(n-1),j-1};$

For $p=1$ *TO* K *DO*:

$v_p=-q_{m+2k(n-1)-(p-1)n,j-1};\ u_p=-[\lambda^{(p)},q_{j-1}]+\sum_{\mu=1}^{k}x_{p\mu}v_p;$

END

$q_j=Zq_{j-1}+\hat{q}xy+fv+bu+\sum_{p=1}^{k}c^{(p)}v_p+\sum_{p=1}^{k}d^{(p)}u_p;$

$\rho_j = Z_0\rho_{j-1} + \hat{\rho}xy + \Phi v + \beta u + \sum_{p=1}^{k} \Phi^{(p)} v_p + \sum_{p=1}^{k} \beta^{(p)} u_p;$

$a = [q^T_{k(n-1)+1,j},\ q^T_{k(n-1)+2,j},\ \dots,\ q^T_{k(n-1)+m,j}];$

$y = [q_j, q_j]^{-1};\ x_0 = x_0 + \rho_j y a b_0;$

$P = Z^{-1}(q_j - t\rho_{1j});$

$For\ p = 1\ TO\ k\ DO;$

$v_p = [P, \lambda^{(p)}];\ c^{(p)} = c^{(p)} + q_j y v_p;\ \Phi^{(p)} = \Phi^{(p)} + \rho_j y v_p;$

$d^{(p)} = d^{(p)} + q_j y P^*_{m+2k(n-1)-(p-1)n,j};$

$\beta^{(p)} = \beta^{(p)} + \rho_j y P^*_{m+2k(n-1)-(p-1)n,j};$

END

$f = f + q_j y P^*_{m+k(n-1),j};\ \Phi = \Phi + \rho_j y P^*_{m+k(n-1),j};$

$b = b + q_j y P^*_{k(n-1),j};\ \beta = \beta + \rho_j y P^*_{k(n-1),j};$

$L = ZL;\ \varepsilon = -[L, \hat{q}];\ \hat{q} = \hat{q} + q_j y\varepsilon;\ \hat{\rho} = \hat{\rho} + \rho_j y\varepsilon;$

END

2. *Решение интегральных уравнений с „почти разностным" ядром.* Пусть дано интегральное уравнение

$$y(x) = \lambda \int_0^1 K(x, t) y(t) dt + f(x),\quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{2}$$

где $K(x, t) = \|K_{ij}(x, t)\|;\ i, j = 1, 2, \dots, n$

$$y(x) = [y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)]^T;\ f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]^T$$

и пусть ядро $K(x, t)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial K}{\partial x} = \sum_{s=1}^{k} \lambda^{(s)}(x) \varkappa^{(s)}(t), \tag{3}$$

где

$$\lambda^{(s)}(x) = \|\lambda^{(s)}_{ij}(x)\|;\ \varkappa^{(s)}(t) = \|\varkappa^{(s)}_{ij}(t)\|;\ i, j = 1, 2, \dots, n$$

Все параметры уравнения будем считать имеющими требуемую ниже гладкость.

Если дискретизировать данное уравнение с применением формулы Гаусса $2m$-ого порядка $(m \geqslant 2)$, то, используя (3), нетрудно получить

$$K(x_{i+1}, x_{j+1}) - K(x_i, x_j) = \frac{h}{2} \sum_{s=1}^{k} \sum_{p=1}^{m} A_p \bar{\lambda}^{(s)}_i \bar{\varkappa}^{(s)}_j + O(h^{2m}),$$

где A_p—соответствующие коэффициенты, $\bar{\lambda}^{(s)}_i$, $\bar{\varkappa}^{(s)}_j$ определяются через значения $\lambda^{(s)}$, $\varkappa^{(s)}$ в соответствующих точках, а h есть шаг дискретизации $(h \to 0)$ и $x_{i+1} = x_i + h$. В этом случае блоки будут $(mn \times mn)$-матрицами.

Остановимся на конкретном уравнении с ядром

$$
K(x,t)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2(t+1)^2}, & x=t \\ \dfrac{1}{(x-t)^2}\left(\dfrac{x-t}{x+1}-\ln\dfrac{x+1}{t+1}\right), & x\neq t. \end{cases} \tag{4}
$$

Если считать, что $y(x)=1$, то

$$
f(x)=\begin{cases} 1+\lambda(2\ln 2-1), & x=0 \\ 1+\lambda/2-\dfrac{\lambda\ln 2}{2}, & x=1 \\ 1+\lambda\left(\dfrac{\ln 2}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x+1}{2}\right)(x-1)^{-1}-\dfrac{\ln(x+1)}{x}\right), & x\neq 0,\ x\neq 1. \end{cases}
$$

Нетрудно проверить, что в данном случае

$$
\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\right)K(x,t)=\frac{1}{(x+1)^2}\cdot\frac{1}{t+1}. \tag{5}
$$

Кроме того, ядро (4) явно невырожденное, что исключает простые экономичные методы решения уравнения (2). Данное уравнение дискретизировано с применением формулы Гаусса четвертого порядка. Полученная система решена контрольным методом Гаусса с построчным выбором ведущего элемента и, после приведения с помощью (5) к системе, матрица которой удовлетворяет условию (1), — вышеизложенным алгоритмом. В таблице приведены средние относительные погрешности при четырех значениях λ.

N \ λ	−2		4		−10		20	
	A_1	A_2	A_1	A_2	A_1	A_2	A_1	A_2
4	$2{,}36\cdot10^{-6}$	$2{,}94\cdot10^{-5}$	$1{,}21\cdot10^{-6}$	$2{,}89\cdot10^{-5}$	$3{,}92\cdot10^{-6}$	$8{,}65\cdot10^{-5}$	$2{,}20\cdot10^{-6}$	$1{,}32\cdot10^{-4}$
8	$3{,}13\cdot10^{-7}$	$2{,}81\cdot10^{-5}$	$1{,}57\cdot10^{-7}$	$2{,}34\cdot10^{-8}$	$5{,}28\cdot10^{-7}$	$7{,}35\cdot10^{-6}$	$2{,}62\cdot10^{-7}$	$1{,}01\cdot10^{-5}$
16	$1{,}82\cdot10^{-7}$	$8{,}49\cdot10^{-8}$	$8{,}15\cdot10^{-8}$	$1{,}31\cdot10^{-7}$	$3{,}13\cdot10^{-7}$	$3{,}59\cdot10^{-7}$	$1{,}55\cdot10^{-7}$	$6{,}64\cdot10^{-7}$
32	$1{,}72\cdot10^{-7}$	$1{,}57\cdot10^{-7}$	$8{,}72\cdot10^{-8}$	$7{,}90\cdot10^{-8}$	$3{,}00\cdot10^{-7}$	$2{,}66\cdot10^{-7}$	$1{,}50\cdot10^{-7}$	$1{,}32\cdot10^{-7}$
64	$1{,}73\cdot10^{-7}$	$1{,}72\cdot10^{-7}$	$8{,}70\cdot10^{-8}$	$8{,}64\cdot10^{-8}$	$2{,}99\cdot10^{-7}$	$2{,}96\cdot10^{-7}$	$1{,}49\cdot10^{-7}$	$1{,}48\cdot10^{-7}$

В таблице через N обозначено количество отрезков, на которые делится интервал (0,1), A_1—метод Гаусса, A_2—предложенный метод.

Как видим, метод A_2 точностью не уступает методу A_1. Соотношение затраченного времени T_1/T_2 (T_1—время выполнения алгоритма A_1, T_2—время выполнения алгоритма A_2) при $N\to\infty$ имеет порядок $\dfrac{1}{132}N$.

Институт математики Академии наук Армянской ССР

Համարյա տարբերակային կորիզով ինտեգրալ հավասարման լուծման խնայողական ալգորիթմ

Եթե երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման կորիզը բավարարում է հետևյալ պայմանին

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}\right)K(x,t)=\sum_{s=1}^{k}\lambda^{(s)}\chi^{(s)}(t)$$

ապա կասենք, որ այն համարյա տարբերակային է (քանի որ $\lambda^{(s)}, \chi^{(s)}=0$ *դեպքում այն տարբերակային է՝* $K=K(x-t)$)։

Աշխատանքում մշակված և փորձարկված է բարձր ճշգրտության խնայողական ալգորիթմ այդպիսի հավասարումները լուծելու համար։

Հիմքում ընկած է (2) աշխատանքում առաջարկված օրթոգոնալ վերլուծության ալգորիթմը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *G. Cybenko*. Siam J. sci. stat. comput., v. 8 p. 734–740 (1987). [2] *Г. В. Агекян, А. Б. Нерсесян*, Блочно-ортогональное разложение матриц теплицева типа и быстрое решение некоторых интегральных уравнений. Депонировано в Арм ИИНТИ № 64–Ар. 89. 1989. [3] *Г. И. Марчук*, Вычислительные процессы и системы, Наука, М., вып. 1, 1983. [4] *И. П. Мысовских*, Лекции по методам вычислений, Физматгиз, М., 1962.