ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Том 90 1990 №2

УДК 517.982.37

МАТЕМАТИКА

Р. М. Мартиросян

Об одном условии разрешимости проблемы моментов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 16/I 1990)

Пусть на измеримом пространстве (X, Σ) задана положительная мера μ. Если $S \in \Sigma$, то под Σ_S будем понимать класс всех измеримых подмножеств множества S. Будем также считать, что измеримые функции, заданные на S, принимают значения из поля K, где K — поле комплексных или поле вещественных чисел. При этом через $L_1(S, \mu)$ будем обозначать пространство всех измеримых на S функций, которые суммируемы по мере μ_S, являющейся сужением μ на Σ_S. Однако всюду ниже мы будем опускать указание на такое сужение.

Теорема 1. *Пусть последовательность $\{h_n, n=1, 2, \ldots\}$ измеримых функций, принимающих значения из поля K, удовлетворяет условиям:*

1) *мера множества $\{x \in X : h_1(x) \neq 0\}$ положительна,*

2) *если $n \geq 2$, то для любого $M > 0$ существует измеримое множество $e_{M,n} \in \Sigma$, на котором все функции h_i, $i=1, 2, \ldots$, суммируемы и*

$$\int_{e_{M,n}} |h_n| d\mu > M \int_{e_{M,n}} \{|h_1| + \ldots + |h_{n-1}|\} d\mu.$$

Тогда для любой числовой последовательности $\{w_n \in K, n = 1, 2, \ldots\}$ найдется измеримая функция W такая, что все произведения $h_n W$ суммируемы на X и

$$\int_X h_n W d\mu = w_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Доказательство. Положим

$$\varepsilon_n = \{x \in X : |h_1(x)| + \ldots + |h_n(x)| > 0\}, \; n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

и рассмотрим векторное пространство L всех измеримых функций φ, для которых произведения

$$\{|h_1(x)| + \ldots + |h_n(x)|\}\varphi(x)$$

суммируемы при каждом $n = 1, 2, \ldots$. Введем в L возрастающую последовательность полунорм p_n, полагая для каждого $n = 1, 2, \ldots$

$$p_n(\varphi) = \int_X \{|h_1(x)| + \ldots + |h_n(x)|\}|\varphi(x)| d\mu, \quad \varphi \in L. \tag{2}$$

Рассмотрим далее в полученном локально выпуклом пространстве E последовательность $\{l_n, n=1, 2, \ldots\}$ линейных функционалов, полагая

$$l_n(\varphi) = \int_X h_n \varphi \, d\mu, \quad \varphi \in E, \quad n=1, 2, \ldots. \tag{3}$$

Для доказательства теоремы мы воспользуемся известным в теории локально выпуклых пространств предложением (см., например, [1], с. 5), состоящим в том, что если пространство E полно и каждый функционал l_n непрерывен по полунорме p_n, а при $n \geq 2$ разрывен по полунорме p_{n-1}, то для любой последовательности $\{w_n \in K, n=1, 2, \ldots\}$ найдется элемент $\varphi \in E$, для которого

$$l_n(\varphi) = w_n, \quad n=1, 2, \ldots \tag{4}$$

При этом предполагается, что все функционалы l_n ненулевые, а полунормы p_n образуют неубывающую последовательность $p_1(\varphi) \leq p_2(\varphi) \leq p_3(\varphi) \leq \ldots, \varphi \in E$.

Полнота же пространства E означает здесь, что для любой последовательности $\{\varphi_k, k=1, 2, \ldots\} \subseteq E$, фундаментальной по каждой полунорме p_n, существует элемент $\varphi \in E$ такой, что

$$\lim_{k \to \infty} p_n(\varphi - \varphi_k) = 0, \quad n=1, 2, \ldots.$$

В рассматриваемом случае из условий теоремы следует, что все функционалы l_n ненулевые, а полунормы p_n, очевидно, образуют неубывающую последовательность. Докажем полноту E. Пусть последовательность $\{\varphi_k \in E, k=1, 2, \ldots\}$ фундаментальна по каждой полунорме p_n. Это означает, что при каждом $n=1, 2, \ldots$ последовательность функций $(|h_1| + \ldots + |h_n|)\varphi_k$, $k=1, 2, \ldots$, фундаментальна в пространстве $L_1(\sigma_n, \mu)$. Если эта последовательность сходится в среднем к функции $\Psi_n \in L_1(\sigma_n, \mu)$, то положим

$$\Phi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\Psi_n(x)}{|h_1(x)| + \ldots + |h_n(x)|}, & x \in \sigma_n, \\ 0, & x \in X \setminus \sigma_n, \end{cases}$$

где n пробегает значения $1, 2, \ldots$. Очевидно, Φ_n измеримы и

$$\lim_{k \to \infty} \int_X \{|h_1| + \ldots + |h_n|\} |\varphi_k - \Phi_n| \, d\mu = 0, \quad n=1, 2, \ldots.$$

Из этого соотношения нетрудно усмотреть, что функции Φ_n определяются на σ_n однозначно с точностью до значений на множествах нулевой меры. Поэтому, принимая во внимание, что $\sigma_n \subseteq \sigma_m$ при $n < m$, можно принять, что $\Phi_n(x) = \Phi_m(x)$ для всех $x \in \sigma_n$. Положим теперь

$$\sigma = \bigcup_n \sigma_n$$

и зададим измеримую функцию Φ на X следующим образом. Если $x \in \sigma$, то $x \in \sigma_n$ при некотором натуральном n. Положим $\Phi(x) = \Phi_n(x)$. Если же $x \in X \setminus \sigma$, то положим $\Phi(x) = 0$. Очевидно, что

$$\lim_{k \to \infty} \int_X \{|h_1| + \ldots + |h_n|\} |\varphi_k - \Phi| \, d\mu = 0, \quad n=1, 2, \ldots$$

Отсюда стандартные выкладки приводят к включению $\Phi\in E$, поэтому пространство E полно. Заметим далее, что, как нетрудно видеть, каждый функционал l_n непрерывен по полунорме p_n. Докажем разрывность функционала l_n по полунорме p_{n-1} при $n\geqslant 2$. Для этого воспользуемся условием 2 теоремы, полагая при заданных $n\geqslant 2$ и $M>0$

$$\varphi_{M,n}(x)=\begin{cases}\exp(-i\arg h_n(x)), & x\in e_{M,n},\\ 0, & x\overline{\in} e_{M,n}.\end{cases}$$

Из упомянутого условия следует, что $\varphi_{M,n}$ принадлежит пространству E, ибо все h_i, $i=1, 2, \ldots$, суммируемы на $e_{M,n}$. Имеем далее

$$l_n(\varphi_{M,n})=\int\limits_{e_{M,n}}|h_n|d\mu>M\int\limits_{e_{M,n}}\{|h_1|+\ldots+|h_{n-1}|\}d\mu=$$

$$=M\int\limits_X\{|h_1|+\ldots+|h_{n-1}|\}|\varphi_{M,n}|d\mu=Mp_{n-1}(\varphi_{M,n}),$$

что и доказывает разрывность l_n по полунорме p_{n-1}. Поэтому, согласно сказанному выше, теорема доказана. Отметим один ее важный частный случай.

Теорема 2. *Рассмотрим систему уравнений*

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}u_k=w_i,\quad i=1, 2, \ldots, \tag{5}$$

где a_{ik} принадлежат полю K, $i, k=1, 2, \ldots$. Если

1) *не все коэффициенты a_{1k} первого из этих уравнений равны нулю,*

2) *для любого $M>0$ и любого $n\geqslant 2$ существует k такое, что*

$$|a_{nk}|>M\sum_{i=1}^{n-1}|a_{ik}|,$$

то для любой последовательности $\{w_i\in K, i=1, 2, \ldots\}$ найдется последовательность $\{u_k\in K, k=1, 2, \ldots\}$, удовлетворяющая системе уравнений (5) *и такая, что все ряды в левых частях этой системы сходятся абсолютно.*

Доказательство. Для доказательства примем в качестве X в предыдущей теореме какое-нибудь счетное множество. $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, и на σ-алгебре всех его подмножеств зададим меру μ, полагая меру одноточечных подмножеств равной единице (можно было бы рассмотреть и конечную меру, полагая, например, $\mu(\{x_k\})=\frac{1}{k^2}$, $k=1, 2, \ldots$, однако в предыдущей теореме конечность меры не предполагалась). Пусть далее функции $h_n: X\to K$, $n=1, 2, \ldots$, определяются соотношениями $h_n(x_k)=a_{nk}$, $k=1, 2, \ldots$. Очевидно, условие 1 означает, что $\mu\{x\in X: h_1(x)\neq 0\}>0$. Далее, если выполнено условие 2, то обозначим через $e_{M,n}$ одноточечное множество $\{x_k\}$. При этом все функции h_i, $i=1, 2, \ldots$, окажутся суммируемыми на множестве $e_{M,n}$ и условие 2 предыдущей теоремы будет выполнено. Если W — решение соответствующей проблемы моментов, то полагая $u_k = W(x_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, мы получим решение системы (5), причем все ряды в левых частях этой системы будут сходиться абсолютно в силу суммируемости функций $h_n W$, $n = 1, 2, \ldots$.

Заметим, что утверждение теоремы 2 при более ограничительных условиях, а именно в предположении, что бесчисленное множество коэффициентов a_{1k} первого из уравнений системы (5) отличны от нуля, принадлежит Г. Пойа (см., например, [2], с. 44).

Ереванский государственный
университет

Հ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Մոմենտների պրոբլեմի լուծելիության մի պայմանի մասին

$(X, \sum, \mu)$ չափով օժտված տարածության վրա դիտարկվում է h_n չափելի ֆունկցիաների այնպիսի հաջորդականություն, որ կամայական h_n ֆունկցիայի մոդուլի միջինը ցանկացած չափով գերազանցում է նախորդ ֆունկցիաների մոդուլների գումարի միջինը համապատասխան բազմությունների վրա։ Աշխատանքում ապացուցվում է, որ եթե h_1-ը համարժեք չէ զրոյի, ապա հետևյալ մոմենտների պրոբլեմը

$$\int_X h_n W d\mu = w_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

ունի լուծում ցանկացած $\{w_n\}$ թվային հաջորդականության համար։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Р. М. Мартиросян*, Дополнительные главы математического анализа. Изд-во ЕГУ, 1983. [2] *Р. Г. Кук*, Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, М., Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1960.