

УДК 529.3.01

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. М. Мхитарян, Мохамед Абдалла Ахмед Абду

О сравнении различных методов решения интегрального уравнения Карлемана, встречающегося в теории упругости

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 31/VIII 1989)

В работе (1) приведены разные по своим аналитическим структурам формулы решения интегрального уравнения Карлемана, которые получены методом М. Г. Крейна, методом сингулярных интегральных уравнений и методом ортогональных многочленов Гегенбауэра. Там же было показано, что формулы решения по последним двум методам переходят одна в другую. В настоящей статье, продолжая рассмотрение поставленного вопроса об идентичности всех трех решений, показывается, что исходя из формул решения М. Г. Крейна также можно получить формулу решения по методу ортогональных многочленов Гегенбауэра.

1. Обращаясь к первой из формул (1.3) из (1), дающей решение уравнения Карлемана при четной правой части $f_+(t)$, в ней положим $n=1$. Кроме того, в ней положим $f_+(t) = C_{2n}^{h/2}(t)$ ($n=0, 1, 2, \dots$), где $C_n'(t)$ — многочлены Гегенбауэра, и вычислим появившиеся при этом интегралы.

Сначала вычислим интеграл

$$I_n(\xi) = \int_0^\xi C_{2n}^{h/2}(s) (\xi^2 - s^2)^{(h-1)/2} ds \quad (n=0, 1, 2, \dots, 0 < \xi < 1).$$

С этой целью в нем положим $s = \xi u$ и воспользуемся формулой 7.319.1 ((2), с. 814). В результате простых преобразований получим ($n=0, 1, 2, \dots, 0 < \xi < 1$)

$$I_n(\xi) = (-1)^n \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(n + h/2) \Gamma[(1+h)/2]}{h \Gamma^2(h/2) n! \xi^{-n}} F\left(-n, n + \frac{h}{2}; 1 + \frac{h}{2}; \xi^2\right),$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера, а $F(a, b, c, x)$ — гипергеометрическая функция Гаусса. Затем учтем зависимость между многочленами Якоби $P_n^{(a,b)}(x)$ и гипергеометрической функцией ((3), с. 172, ф.(16).1), что окончательно даст ($0 < \xi < 1$)

$$I_n(\xi) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma[(1+h)/2]}{(2n+h) \Gamma(h/2)} \xi^n P_n^{(-1, h/2)}(2\xi^2 - 1) \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Далее, применяя правило дифференцирования многочленов Якоби, находим

$$I_n^{(1)}(\xi) = \xi^{1-h} \frac{dI_n}{d\xi} = C_n [h P_{n-1}^{(0,1+h/2)}(2\xi^2-1) + (2n+h)\xi^2 P_{n-1}^{(0,1+h/2)}(2\xi^2-1)]; \quad C_n = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma[(1+h)/2]}{(2n+h)\Gamma(h/2)}; \quad (1.1)$$

$$I_n^{(2)}(\xi) = \frac{dI_n^{(1)}}{d\xi} = C_n [(2n+h)(h+2)\xi P_{n-1}^{(0,1+h/2)}(2\xi^2-1) + (2n+h)(2n+h+2)\xi^3 P_{n-2}^{(1,2+h/2)}(2\xi^2-1)] \quad (0 < \xi < 1, n=0, 1, 2, \dots).$$

Теперь, в соответствии с формулой (1.3) из (1) и (1.1) после некоторых преобразований можем записать

$$A_n(t) = \int_t^1 I_n^{(2)}(\xi) (\xi^2 - t^2)^{(h-1)/2} d\xi = C_n (2n+h) 2^{-(h+3)/2} [(h+2)H_n(u) + (n+1+h/2)G_n(u) + (n+1+h/2)K_n(u)] \quad (n=0, 1, 2, \dots, 0 < t < 1) \quad (1.2)$$

$$H_n(u) = \int_u^1 P_{n-1}^{(0,1+h/2)}(v) (v-u)^{(h-1)/2} dv; \quad G_n(u) = \int_u^1 P_{n-2}^{(1,2+h/2)}(v) (v-u)^{(h-1)/2} dv; \quad K_n(u) = \int_u^1 v P_{n-2}^{(1,2+h/2)}(v) (v-u)^{(h-1)/2} dv. \\ (2\xi^2-1=v; \quad 2t^2-1=u)$$

Здесь и везде $P_n^{(r,s)}(t) \equiv 0$, если $n = -1, -2, \dots$

Последовательно вычислим входящие в (1.2) интегралы.

В интеграле для $H_n(u)$, перейдя к переменной $v = 1 - (1-u)\tau$ ($0 \leq \tau \leq 1$), будем иметь

$$H_n(u) = (1-u)^{(h+1)/2} \int_0^1 (1-\tau)^{(h-1)/2} P_{n-1}^{(0,1+h/2)}[1-(1-u)\tau] d\tau.$$

Последний интеграл можно вычислить при помощи формулы 7.392.1 ((²), с. 856), положив в ней $\lambda = 1$, $\mu = (h+1)/2$, $\alpha = 0$, $\beta = 1+h/2$, $\gamma = 1-u$; $n \rightarrow n-1$. После несложных выкладок при помощи зависимости между многочленами Якоби и гипергеометрической функцией ((²), с. 172, ф. (16).1) получим ($n=0, 1, 2, \dots$)

$$H_n(u) = 2(1-u)^{(h+1)/2} \frac{\Gamma((h+3)/2) \Gamma(n)}{(1+h)\Gamma[n+(h+1)/2]} P_{n-1}^{((h+1)/2, 1/2)}(u), \quad (u = 2t^2-1). \quad (1.3)$$

Обращаясь к вычислению $G_n(u)$, в нем также перейдем к тем же переменным v, τ и опять воспользуемся упомянутой формулой из (²). В результате

$$G_n(u) = 2(1-u)^{(h+1)/2} \frac{n-1}{h+1} {}_3F_2\left(-n+2, n+2+\frac{h}{2}, 1; 2, \frac{h+3}{2}; \frac{1-u}{2}\right),$$

где ${}_3F_2(z_1, z_2, z_3; \beta_1, \beta_2, z)$ — обобщенный гипергеометрический ряд ⁽⁴⁾.
Если положить

$$h_n(z) = z {}_3F_2\left(-n+2, n+2+\frac{h}{2}, 1; 2, \frac{h+3}{2}, z\right) \quad (z = (1-u)/2),$$

то легко показать, что

$$\begin{aligned} \frac{dh_n}{dz} &= F\left(-n+2, n+2+\frac{h}{2}; \frac{h+3}{2}, z\right) = \\ &= \Gamma[(h+3)/2] \Gamma(n-1) \{\Gamma[n+(h-1)/2]\}^{-1} P_{n-2}^{((h+1)/2, 5/2)}(u). \end{aligned}$$

Далее, применяя формулу (17) из ⁽³⁾, с. 172), получим

$$h_n(z) = -\frac{2\Gamma[(h+3)/2] \Gamma(n-1)}{(2n+h+2)\Gamma[n+(h-1)/2]} P_{n-1}^{((h-1)/2, 3/2)}(1-2z) + C.$$

Так как $h_n(0)=0$ и $P_n^{(\alpha, \beta)}(1) = \Gamma(n+\alpha+1)/[n!\Gamma(\alpha+1)]^{-1}$, то $C = (h+1)/(n-1)(2n+h+2)$. Следовательно, окончательно будем иметь ($u = 2t^2-1$, $n=0, 1, 2, \dots$)

$$G_n(u) = \frac{4(1-u)^{(h-1)/2}}{2n+h+2} \left[1 - \frac{2\Gamma[(h+3)/2] \Gamma(n)}{(h+1)\Gamma[n+(h-1)/2]} P_{n-1}^{((h-1)/2, 3/2)}(u) \right]. \quad (1.4)$$

Совершенно аналогичным способом получим, что

$$\begin{aligned} K_n(u) &= -\frac{8\Gamma[(h+5)/2] \Gamma(n)(1-u)^{(h+1)/2}}{(2n+h+2)(h+3)\Gamma[n+(h+1)/2]} P_{n-1}^{((h-1)/2, 1/2)}(u) - \\ &= -\frac{8\Gamma[(h+3)/2] \Gamma(n)(1-u)^{(h-1)/2}}{(2n+h+2)(h+1)\Gamma[n+(h-1)/2]} u F_{n-1}^{((h-1)/2, 3/2)}(u) + \\ &+ 4(1-u)^{(h-1)/2} (2n+h+2)^{-1} \quad (u = 2t^2-1, n=0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Теперь подставляя выражения $H_n(u)$, $G_n(u)$ и $K_n(u)$ из (1.3) — (1.5) в (1.2) и проделывая простые преобразования, придем к следующему соотношению:

$$\begin{aligned} A_n(t) &= 2^{-(h+3)/2} C_n(2n+h)(1-u)^{(h-1)/2} \left\{ \frac{\Gamma[(h+1)/2] \Gamma(n)}{\Gamma[n+(h-1)/2]} L_n(u) + \right. \\ &+ 4 \left. \right\}; \quad L_n(u) = 2 \left[\frac{1-u}{2n+h-1} P_{n-1}^{((h+1)/2, 1/2)}(u) - (1+u) P_{n-1}^{((h-1)/2, 3/2)}(u) \right] \quad (1.6) \\ &(u = 2t^2-1, n=0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Выражение $L_n(u)$ из (1.6) преобразуем дальше, для чего заметим, что

$$P_{n-1}^{((h+1)/2, 1/2)}(u) = \frac{4}{2n+h} \frac{d}{du} \left[P_n^{((h-1)/2, -1/2)}(u) \right].$$

С другой стороны, из формулы (21) ⁽³⁾, с. 177) легко вывести, что

$$P_n^{((h-1)/2, -1/2)}(u) = \frac{\Gamma(n+1/2)\Gamma(h/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+h/2)} C_{2n}^{h/2}(t) \quad (u = 2t^2-1, n=0, 1, 2, \dots).$$

Таким же способом преобразуется второй член в выражении $L_n(u)$. В результате будем иметь ($n=0, 1, 2, \dots$)

$$L_n(u) = - \frac{4n(h-2)\Gamma(n+1/2)\Gamma(h/2-1)}{\Gamma(n+h/2)(2n+h-1)\sqrt{\pi}} C_{2n}^{h/2}(t) \quad (u = 2t^2 - 1). \quad (1.7)$$

Далее подстановка (1.7) в (1.6) окончательно даст

$$A_n(t) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma[(h+1)/2]}{2\Gamma(h/2)} (1-t^2)^{h-1/2} \left\{ 2 - \frac{(h-2)n!\Gamma(n+1/2)\Gamma[(h+1)/2]\Gamma(h/2-1)}{\Gamma(n+h/2)\Gamma[n+(h+1)/2]\sqrt{\pi}} C_{2n}^{h/2}(t) \right\} \quad (n=0, 1, 2, \dots, 0 < t < 1).$$

Остается вычислить $I_n^{(1)}(1) = (dI_n/dt)_{t=1}$ из (1.1). Эти простые вычисления дают

$$I_n^{(1)}(1) = \sqrt{\pi}\Gamma[(h+1)/2]/\Gamma(h/2). \quad (1.9)$$

Теперь сопоставление (1.8) — (1.9) с формулой (1.3) из (1) приводит к следующему выражению для $\varphi_+(t)$:

$$\varphi_+(t) = \frac{\Gamma(h)(2n)!\cos(\pi h/2)}{\pi\Gamma(2n+h)} C_{2n}^{h/2}(t) \quad (n=0, 1, \dots, 0 < t < 1),$$

которое эквивалентно спектральным соотношениям

$$\int_{-1}^1 \frac{C_{2n}^{h/2}(s)ds}{|t-s|^h(1-s^2)^{(1-h)/2}} = i_{2n} C_{2n}^{h/2}(t) \quad (n=0, 1, 2, \dots, 0 < t < 1), \quad (1.10)$$

совпадающим с приведенными в (1) (ф. (1.7)) при четных индексах ($n \rightarrow 2n$).

Обращаясь к формуле (1.4) из (1), дающей решение уравнения Карлемана при нечетной правой части $f_-(t)$, в ней опять положим $a=1$. Кроме того, положим $f_-(t) = C_{2n-1}^{h/2}(t)$ ($n=1, 2, \dots$). Совершенно аналогичным путем, как выше, покажем, что имеют место спектральные соотношения

$$\int_{-1}^1 \frac{C_{2n-1}^{h/2}(s)ds}{|t-s|^h(1-s^2)^{(1-h)/2}} = i_{2n-1} C_{2n-1}^{h/2}(t) \quad (n=1, 2, \dots, 0 < t < 1); \quad (1.11)$$

формулы (1.10) — (1.11) полностью исчерпывают спектральные соотношения (1.7) из (1).

Таким образом, исходя из формул решения М. Г. Крейна (1.3) — (1.4), приведенных в (1) и дающих решение интегрального уравнения Карлемана (0.1) из (1), можно получить спектральные соотношения (1.7), также приведенные в работе (1).

2. Теперь, как в (1), положим

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n C_n^{h/2}(t) \quad (|t| < 1).$$

Тогда на основании изложенных выше результатов упомянутые формулы М. Г. Крейна приводят к следующей формуле решения уравнения Карлемана:

$$\varphi(t) = (1-t^2)^{(h-1)/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t_n^{-1} C_n^{h/2}(t) \quad (|t| < 1),$$

что и требовалось показать.

Институт механики Академии наук Армянской ССР
Ереванский государственный университет

Ս. Մ. ՄԽԻՏԱՐՅԱՆ, ՄՈՆԱՄԵՆ ԲԵՏԻԱՆ ԱԶԽԵՂ ԱՐԴՈՒ

Կաուլեմանի ինտեգրալ հավասարման լուծման տարբեր մեթոդների
համեմատման մասին առաձգականության տեսության մեջ

Ներկա աշխատանքում, որը նախորդ աշխատանքի շարունակությունն է, Կաուլեմանի ինտեգրալ հավասարման լուծման բանաձևը՝ արտահայտված Մ. Գ. Կրեյնի մեթոդով ինտեգրալների միջոցով, ձևափոխվում է նույն հավասարման լուծման բանաձևին՝ արտահայտված Գեգենբաուերի օրթոգոնալ բազմանդամների մեթոդով, անվերջ շարքի միջոցով։ Այդ նպատակով օգտագործվում են Կաուլեմանի հավասարման լուծման բանաձևերը Մ. Գ. Կրեյնի մեթոդով, երբ հավասարման աջ մասը ղույգ կամ կենտ ինդեքսներով Գեգենբաուերի բազմանդամներ են։ Արդյունքում ստացվում է, որ ելնելով Մ. Գ. Կրեյնի բանաձևերից կարելի է ստանալ Գեգենբաուերի բազմանդամներ պարունակող հայտնի սպեկտրալ առնչությունները, որոնց օգնությամբ էլ ցույց է տրվում նշված բանաձևերի մեկից մյուսին անցումը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ С. М. Мхитарян, Мохамед Абдалла Ахмед Абду, ДАН АрмССР, т. 89, № 3, (1989). ² И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Наука, М., 1971. ³ Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции. Т. 2, Наука, М., 1974. ⁴ Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции. Т. 1, Наука, М., 1973.