

УДК 621.3.019.3

КИБЕРНЕТИКА

Ю. М. Гаспарян, Д. Р. Оганесян

К расчету нормы монотонных булевых функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР Р. В. Атоянном 4/VII 1989)

1. Большинство существующих методов анализа надежности систем, функционирование которых описывается булевыми моделями (¹), сводится к вычислению норм булевых функций, которые в большинстве практических случаев являются монотонными. Наиболее известными методами являются: метод включения-исключения (²), метод ортогонализации (¹⁻³), метод разложения булевой функции по множеству «ключевых переменных» (¹) и модуляризации булевой функции (⁴).

В данной работе предлагается метод и алгоритм вычисления нормы булевой функции, в котором используются обе процедуры: нахождение модулей и замена их эквивалентными булевыми переменными, приводящая к упрощению булевой функции, и метод разложения функции по множеству «ключевых переменных».

Достаточная эффективность данного метода объясняется тем, что после разложения булевой функции по множеству переменных получаются функции, как правило, содержащие модули определенного типа, замена которых эквивалентными переменными существенно уменьшает как сложность вычислений, так и требуемый объем памяти.

2. *Обозначения, определения, постановка задачи.* Пусть $f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ монотонная булева функция. Обозначим через $P(x_i)$ вероятность события $x_i = 1$, а через $Q(x_i)$ — вероятность события $x_i = 0$, ($P(x_i) + Q(x_i) = 1$, $i = \overline{1, n}$).

Определение 1. Нормой булевой функции называется вероятность появления события $f(\bar{x}) = 1$, которая обозначается через $P[f(\bar{x})]$.

Задача, рассматриваемая в данной работе, заключается в нахождении $P[f(\bar{x})]$ при известных значениях $P(x_i)$, $i = \overline{1, n}$, причем предполагается, что переменные x_i , $i = \overline{1, n}$ статистически независимы.

Определение 2. Пусть для $f(\bar{x})$ возможна следующая декомпозиция:

$$f(\bar{x}) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n, w(x_i, x_j)).$$

Тогда переменные x_i и x_j назовем последовательно склеиваемыми, если $w(x_i, x_j) = x_i \& x_j$, и параллельно склеиваемыми, если $w(x_i, x_j) = x_i \vee x_j$.

Пусть оператор L_{ij}^+ , $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$ означает, что в $f(\bar{x})$ под-функция, зависящая только от склеиваемых переменных x_i и x_j , за-

меняется эквивалентной булевой переменной $y'(i, j)$, причем $i=1$, если x_i и x_j последовательно склеиваемы и $i=0$, если x_i и x_j параллельно склеиваемы.

По индукции определяется следующее произведение операторов:

$$L_{\overline{m}}^{i_k} \dots L_1^{i_1}[f(\overline{x})] = L_{\overline{m}}^{i_k}[L_{\overline{m}}^{i_{k-1}}[\dots L_1^{i_m}[f(\overline{x})] \dots]], \quad (1)$$

где $i_j \in \{0, 1\}$, $j = \overline{1, k}$; $m = 1, 2, \dots$

Определение 3. Назовем функцию $f(\overline{x})$ абсолютно несжимаемой относительно операторов L^0 и L^1 , если она не содержит ни одной пары последовательно или параллельно сжимаемых переменных.

Определение 4. Назовем функцию $f(\overline{x})$ абсолютно сжимаемой, если существует хотя бы одно произведение операторов типа (1), которое преобразует $f(\overline{x})$ в функцию от одной переменной.

Определение 5. Назовем функцию $f(\overline{x})$ частично сжимаемой, если она не является абсолютно сжимаемой и в то же время содержит пары склеиваемых переменных.

Пусть $f(\overline{x})$ частично сжимаемая функция. Обозначим через $Mf(\overline{x})$ множество абсолютно несжимаемых функций относительно операторов L^0 и L^1 , которое получается из $f(\overline{x})$, если применить всевозможные произведения операторов типа (1). Через $\hat{f}(\overline{x})$ обозначим абсолютно несжимаемую функцию, которая принадлежит $Mf(\overline{x})$ и в то же время имеет минимальное количество аргументов.

Пусть $f(\overline{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ некоторая абсолютно несжимаемая функция. Обозначим через $Z\{f(\overline{x})\}$ множество, элемент которого Z_i представляет собой некоторое подмножество переменных, принадлежащих $\overline{x}$, и обладает следующим свойством. Если в $f(\overline{x})$ всем переменным, принадлежащим Z_i , присвоить значение 0, то после применения известных эквивалентных преобразований булевой алгебры $x \& 0 = 0$ и $x \vee 0 = x$ она становится абсолютно сжимаемой. Выберем $\hat{Z}_i \in Z\{f(\overline{x})\}$ с минимальной мощностью. Если таких элементов больше единицы, то выберем из них произвольный и обозначим его через $\hat{Z}\{f(\overline{x})\}$.

Определение 6. Пусть $f(\overline{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — некоторая монотонная булева функция, а $\hat{x}$ множество переменных, содержащихся в $\hat{Z}\{f(\overline{x})\}$. Тогда $\hat{x}$ является множеством ключевых переменных монотонной булевой функции $f(\overline{x})$.

3. Некоторые свойства монотонных булевых функций.

Пусть монотонная булева функция $f(\overline{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ задана в виде ДНФ:

$$f(\overline{x}) = S_1 \vee S_2 \vee \dots \vee S_m, \text{ где } S_j = x_{i_1} \& x_{i_2} \& \dots \& x_{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n.$$

Каждому переменному x_i , $i = \overline{1, n}$ припишем некоторый двоичный вектор $a' = (a'_1, \dots, a'_m)$, где $a'_i = 1$, если $x_i \in S_1$ и $a'_i = 0$ в противном случае.

Тогда легко доказывается следующее утверждение.

Утверждение 1. Следующие два предложения являются эквивалентными:

1) в булевой функции $f(\bar{x})$ переменные x_i и x_j последовательно склеиваемы;

2) хемингово расстояние между двоичными векторами a^i и a^j равно нулю, т. е. $d = (a_i \oplus a_j) = 0$.

Пусть $f^*(\bar{x})$ функция двойственная $f(\bar{x})$, задана в виде ДНФ: $f^*(x) = B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_l$.

Каждой переменной x_i , $i = \overline{1, l}$ припишем двоичный вектор $b^i = (b_1^i, \dots, b_l^i)$, где $b_j^i = 1$, если $x_i \in B_j$ и $b_j^i = 0$ в противном случае.

Тогда легко доказывается следующее утверждение.

Утверждение 2. Следующие два предложения являются эквивалентными.

1) в функции $f(\bar{x})$ переменные x_i и x_j параллельно склеиваемы;

2) хемингово расстояние между векторами b^i и b^j равно нулю, т. е. $d = |b^i \oplus b^j| = 0$.

Построим матрицу C , ассоциированную с функцией $f(\bar{x})$, строки которой являются x_i , $i = \overline{1, n}$, а столбцы — S_j , $j = \overline{1, m}$. Элемент матрицы C обозначим через C_{ij} . Тогда $C_{ij} = 1$, если x_i содержится в S_j , и $C_{ij} = 0$ в противном случае. Обозначим через n_k количество единиц в k -ой строке. Тогда имеет место следующее утверждение.

Утверждение 3. Для того чтобы переменные x_i и x_j были параллельно склеиваемыми, необходимо и достаточно, чтобы матрица C одновременно удовлетворяла следующим условиям:

1) $n_i = n_j$;

2) $c_{ik} \& c_{jk} = 0$, $k = \overline{1, m}$;

3) если существует столбец с номером k , для которого $c_{ik} = 1$ и $c_{jk} = 0$, то существует и хотя бы один столбец с номером l такой что $c_{il} = 0$ и $c_{jl} = 1$, причем $c_{qk} = c_{ql}$, $q \neq i, j$, $q = \overline{1, n}$.

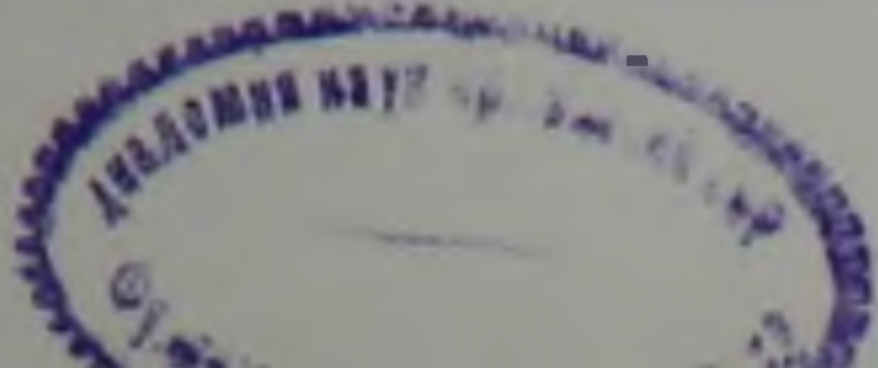
4. Используя свойства, вытекающие из утверждений 1 и 3, были разработаны алгоритм и соответствующая программа, написанная на языке Pascal и реализованная на микроЭВМ серии ДВК.

Алгоритм последовательно применяет следующие две процедуры:

1) разложение булевой функции по множеству ключевых переменных и упрощение полученных после разложения подфункций с использованием известных процедур алгебры логики с участием const 1 и const 0;

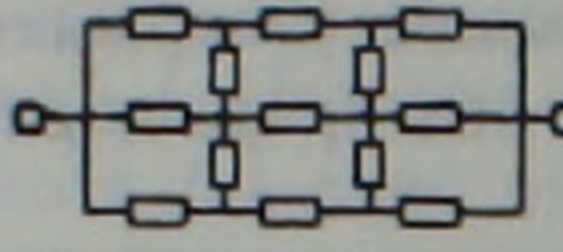
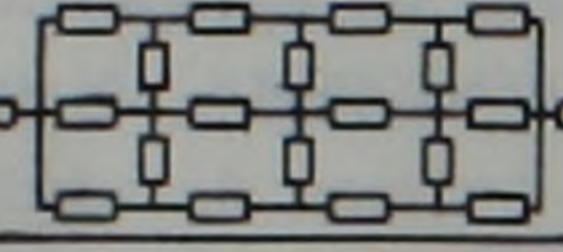
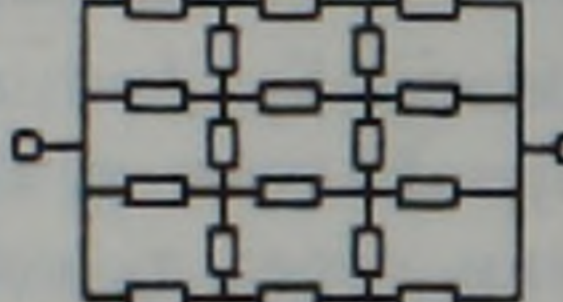
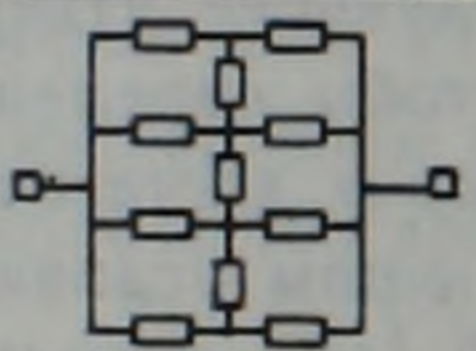
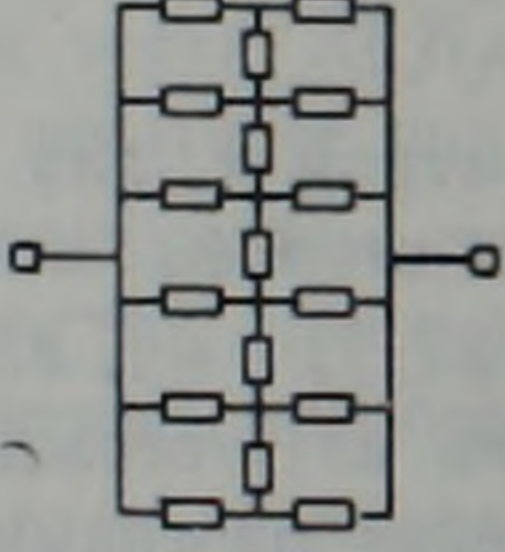
2) поиск последовательно и параллельно склеиваемых переменных и их замена на эквивалентные переменные с эквивалентными вероятностями, причем $p_3 = p_1 p_2$, если переменные x_1 и x_2 являются последовательно склеиваемыми, и $p_3 = p_1 + p_2 - p_1 p_2$, если x_1 и x_2 параллельно склеиваемы.

Для оценки эффективности предложенного в работе алгоритма были произведены расчеты норм булевых функций, представляющих собой структурные функции надежности систем ⁽¹⁾, структурные схемы надежности ⁽¹⁾ которых представлены в столбце 1 таблицы. Расчеты производились на микроЭВМ серии ДВК, причем были использованы



алгоритм Абрахамса (³) и алгоритм, рассмотренный в данной работе. Во всех примерах предполагалось, что $P(x_i) = 0,9, i = 1, 2, \dots$

В таблице приведены количество конъюнктивных членов в ДНФ булевой функции (столбец 2), значения норм структурной функции

№	Типы схем	Количество путей	Норма булевой функции	Время вычислений, с	
				метод Абрахамса	предлагаемый метод
1	2	3	4	5	
1		29	0.99626 0.99622	24	18
2		95	0.99487 0.99480	1620	247
3		80	0.99959 0.99957	647	277
4		16	0.99974 0.99974	5	6
5		36	0.99999 0.99999	145	70

надежности (столбец 3), рассчитанные соответственно рассмотренным выше алгоритмом и алгоритмом Абрахамса, а также приведены значения машинного времени, затраченного при расчете нормы.

Анализ этих результатов показывает, что сложность вычислений нормы булевых функций приведенного в работе алгоритма для рассмотренных примеров меньше или сравнима с вычислительной сложностью вычислений алгоритма Абрахамса. Быстродействие существенно увеличивается в пользу приведенного в работе алгоритма при увеличении разности длины и ширины структурной схемы надежности (⁵). В этом случае после разложения в подфункции структурной функции надежности резко увеличивается количество последовательно и параллельно склеиваемых переменных, что ускоряет процесс расчета нормы функции.

Մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաների նորմայի հաշվարկման ալգորիթմ

Աշխատանքում մտցված են «Հաջորդական և զուգահեռ միացվող փոփոխականների և բացարձակ սեղմվող մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաների դաս» պաղափարները և դիտարկված են այդ ֆունկցիաների որոշ հատկություններ:

Բերվում է մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաների նորմայի հաշվարկման ալգորիթմի նկարագրությունը, որի մեջ օգտագործվում են բուլյան ֆունկցիաների դիտարկված հատկությունները և ֆունկցիայի ըստ «առանցքային» փոփոխականների տարալուծման բանաձևը:

ЛИТЕРАТУРА—ԴՐԱՎԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Н. А. Рябинин, Г. Н. Черкесов. Логико-вероятностные методы исследования надежности структурно-сложных систем, Радио и связь, 1981.
- ² М. О. Locks, IEEE Trans. on Reliability, v. R-29, December, p. 358-371 (1980).
- ³ J. A. Abraham, IEEE Trans. Reliability, v. R-28, 1979 Apr. 58-61 (1979).
- ⁴ J. M. Wilson, IEEE Trans. Reliability, v. R-34, № 4, October, p. 320-321 (1985).
- ⁵ К. Шеннон, Работы по теории информации и кибернетики, ИЛ, М., 1963.