ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Том 89 1989 №5

УДК. 517.986

МАТЕМАТИКА

Л. М. Акопян

Представления квазимаксимальных полугрупп в равномерную алгебру

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракеляном 13/X 1989)

Пусть Γ — аддитивная подгруппа вещественной оси с дискретной топологией, порожденная собственной подполугруппой Γ_0 с единицей, а $\hat{\Gamma}$ — ее компактная группа характеров. Согласно теореме двойственности Понтрягина группа Γ отождествляется с группой характеров группы $\hat{\Gamma}$ соотношением $a \to \chi_a$, где $\chi_a(\alpha) = \alpha(a)$, $\alpha \in \hat{\Gamma}$.

Равномерная алгебра на $\hat{\Gamma}$, порожденная характерами χ_a, $a \in \Gamma_0$ (коротко полугруппой Γ_0), обозначается через $A(\Gamma_0)$ (алгебра обобщенных аналитических функций в смысле Аренса—Зингера). Ее границей Шилова $\partial_{A(\Gamma_0)}$ является $\hat{\Gamma}$, а пространством $M_{A(\Gamma_0)}$ максимальных идеалов (с точностью до гомеоморфизма) — полугруппа $\mathrm{Hom}\Gamma_0$ характеров Γ_0, т. е. гомоморфизмов полугруппы Γ_0 в единичный круг ([1])

Пусть A — равномерная алгебра на компакте X. Будем говорить, что имеется представление некоторой полугруппы Γ_0 в алгебру A, если существует сохраняющий единицу алгебраический гомоморфизм π из Γ_0 в мультипликативную полугруппу алгебры A такой, что линейная оболочка множества $\pi(\Gamma_0)$ плотна в A. Представление $\pi : \Gamma_0 \to A$ ограничено, если $\|\pi(a)\| \leq 1$ для всех $a \in \Gamma_0$.

В работах ([2-4]) описываются представления $\pi : \Gamma_0 \to A$ некоторых полугрупп Γ_0 на полуоси в равномерную алгебру A, когда $|\pi(a)| = 1$ на X при всех $a \in \Gamma_0$. Тогда либо $A = C(X)$, либо A изоморфна $A(\Gamma_0)$.

В данной статье получена аналогичная структурная теорема для так называемого класса квазимаксимальных полугрупп, каковыми являются, в частности, рассматриваемые в ([2-4]) полугруппы. Понятие квазимаксимальной полугруппы, введенное нами в работе ([5]), заключается в следующем.

Определение. *Порождающая группу Γ, собственная подполугруппа $\Gamma_0 \subset \Gamma$ с единицей называется квазимаксимальной, если любая полугруппа в Γ, содержащая Γ_0, либо совпадает с Γ, либо содержится в одной и только одной максимальной подполугруппе Γ_* группы Γ (полугруппа Γ_* максимальна в Γ, если она не содержится ни в одной собственной подполугруппе группы Γ).*

Для полугрупп Γ_0 на полуоси имеет место следующий алгебраический критерий квазимаксимальности.

Полугруппа $\Gamma_0 \subset R_+$ — квазимаксимальна (в группе Γ) тогда и только тогда, когда для любого $a\in\Gamma$ существует такое целое $n\neq0$, что $na\in\Gamma_0$.

Также $\mathrm{Hom}\Gamma_0=\mathrm{Hom}\Gamma_+$ (т. е. $M_{A(\Gamma_0)}=M_{A(\Gamma_+)}$), при этом $\zeta(a)\neq0$ для всех $a\in\Gamma_+$, $\zeta\in\mathrm{Hom}\Gamma_+$, $\zeta\neq\rho_0$, где $\rho_0(0)=1$ и $\rho_0(a)=0$, $a\neq0$.

Теорема 1. *Пусть полугруппа $\Gamma_0\subset R_+$ квазимаксимальна и представление $\pi:\Gamma_0\to A$ ограничено. Тогда, если $|\pi(a_0)|=1$ на X при некотором $a_0\in\Gamma_0$, $a_0\neq0$, то либо $A=C(X)$, либо A изоморфна $A(\Gamma_0)$.*

В связи с этим предварительно получим еще один — аппроксимационный критерий квазимаксимальности.

Теорема 2. *Полугруппа $\Gamma_0\subset R_+$ квазимаксимальна тогда и только тогда, когда алгебра $A(\Gamma_0)$ проникающая, т. е. для любого собственного замкнутого подмножества $F\subset\hat{\Gamma}$ все непрерывные функции F аппроксимируются функциями из $A(\Gamma_0)$.*

Доказательству теоремы предпошлем лемму.

Обозначим через $A_0(E)$ и $A_+(E)$ равномерные замыкания сужений гельфандовских представлений алгебр $A(\Gamma_0)$ и $A(\Gamma_+)$ на произвольный компакт $E\subset\mathrm{Hom}\Gamma_0$.

Лемма. *Пусть $\Gamma_0\subset R_+$—квазимаксимальная полугруппа. Тогда для любого $\zeta_0\in\mathrm{Hom}\Gamma_0$, $\zeta_0\neq\rho_0$ существует ее замкнутая окрестность E такая, что $A_+(E)=A_0(E)$.*

Доказательство. В силу квазимаксимальности Γ_0 ($\mathrm{Hom}\Gamma_0=$ $=\mathrm{Hom}\Gamma_+$) и максимальности Γ_+ для любого $a\in\Gamma_0$, $a\neq0$, преобразование Гельфанда $\hat{\chi}_a$ характера χ_a отображает компакт $\mathrm{Hom}\Gamma_0$ на единичный круг $D=\{z\in C:|z|\leqslant1\}$. Пусть W—замкнутый круг с центром в точке $\zeta_0(a)$, не содержащий нуль. Тогда $E=\{\zeta\in\mathrm{Hom}\Gamma_0:\zeta(a)\in$ $\in W\}$ и есть искомая окрестность. Действительно, пусть $\zeta\notin E$ (т. е. $\zeta(a)\notin W$) и $p(z)$—такой полином, что $|p(z)|<|p(\zeta(a))|$ при всех $z\in W$ Положим $f=p\circ\chi_a$. Тогда $f\in A(\Gamma_0)$ и $|\hat{f}(\eta)|<|\hat{f}(\xi)|$, $\eta\in E$, и так как функция $\hat{f}$ на $M_{A_0(E)}$ максимум модуля принимает на E, то $\zeta\notin M_{A_0(E)}$. Таким образом $M_{A_0(E)}=E$. Теперь, поскольку $\rho_0\notin E(0\notin W)$ и характеры $\chi_a\in\Gamma_0$ обращаются в нуль только в ρ_0, то $\chi_a^{-1}\in A_0(E)$ (элемент g в коммутативной банаховой алгебре A обратим тогда и только тогда, когда преобразование Гельфанда $\hat{g}\neq0$ на пространстве M_A максимальных идеалов алгебры A). В силу квазимаксимальности Γ_0 полугруппа $[-a;\Gamma_0]$, порожденная элементом $-a$ и полугруппой Γ_0, совпадает с Γ, откуда следует, что для любого $b\in\Gamma_+$ найдется такое целое $n>0$, что $c=b+na\in\Gamma_0$. Тогда $\chi_b=\chi_{c-na}=\chi_a^{-n}\cdot\chi_c\in A_0(E)$, а значит $A_+(E)=$ $=A_0(E)$. Лемма доказана.

Равномерная алгебра A на компакте X называется антисимметричной, если в ней нет вещественных функций, отличных от констант. Подмножество $E\subset X$ называется множеством антисимметрии (относительно A), если каждая функция из A, вещественная на E, постоянна на этом множестве.

Проникающая алгебра является антисимметричной. В противном случае на максимальных множествах антисимметрии $E\subset X$, $A(E)=$ $=C(E)$ и, по теореме Бишопа—Шилова, $A=C(X)$ ([6], с. 87).

Доказательство теоремы 2. Надо показать, что для любого собственного замкнутого подмножества $F\subset\hat{\Gamma}$, $A_0(F)=C(F)$. Для этого достаточно показать, что $\varphi_0 \in M_{A(\Gamma_0)}$. Действительно, поскольку характеры $\chi \in \Gamma_0$ обращаются в нуль только в ρ_0, то из условия $\varphi_0 \notin M_{A(\Gamma_0)}$ следует, что все они обратимы в алгебре $A(\Gamma_0)$. Далее, так как $|\chi(\alpha)|=1$, $\alpha \in \hat{\Gamma}$, а $F \subseteq \hat{\Gamma}$, то $\bar{\chi}=\chi^{-1} \in A_0(F)$ для всех $\chi \in \Gamma_0$. Получаем, что $A_0(F)$ есть самосопряженная подалгебра $C(F)$ и по теореме Стоуна—Вейерштрасса $A_0(F)=C(F)$.

Алгебра $A(\Gamma_+)$—проникающая (^{7}), поэтому существует такая функция $f \in A(\Gamma_+)$, что на множестве F $|f-1|<1$ и $f(\rho_0)=0$. Обозначим $B=A_0(F)$ и пусть $[B, f]$—равномерная алгебра, порожденная функцией f и алгеброй B. По лемме, на множестве $M_B \setminus \{\rho_0\}$ функция f локально аппроксимируется функциями из B. Тогда по теореме Гликсберга (^{6}), с. 129) $M_{[B,f]}=M_B$. Но $g=1-f \in [B, f]$ и $\hat{g}(\rho_0)=1$, а на множестве F $|g|<1$, поэтому $\rho_0 \notin M_{[B,f]}$ (функция $\hat{g}$ достигает максимума модуля на F).

Для доказательства обратного утверждения надо показать, что для любого $a \in \Gamma$ существует такое целое $n \neq 0$, что $na \in \Gamma_0$ (алгебраический критерий квазимаксимальности). Допустим противное, т. е. существует такое $a \in \Gamma$, что $na \notin \Gamma_0$ для всех целых $n \neq 0$. Пусть $\Gamma_1 = [\pm a, \Gamma_0]$—полугруппа, порожденная элементами $\pm a$ и полугруппой Γ_0, и $A(\Gamma_1)$—алгебра, порожденная полугруппой Γ_1. По условию, алгебра $A(\Gamma_0)$ проникающая, поэтому проникающая и алгебра $A(\Gamma_1)$, а следовательно, алгебра $A(\Gamma_1)$ антисимметрична. С другой стороны, алгебра $A(\Gamma_1)$ содержит функции χ_a и $\bar{\chi}_a$, поэтому $A(\Gamma_1)=C(\hat{\Gamma})$, а следовательно, $\Gamma_1=\Gamma$.

Пусть теперь $b \in \Gamma_0$, $b \neq 0$ и целое $n \neq 0$ такое, что $-b+na \in \Gamma_0$. Тогда $na=b+(-b+na) \in \Gamma_0$, пришли к противоречию. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1. Сначала покажем, что $|\pi(a)| \equiv 1$ на X при всех $a \in \Gamma_0$.

В силу квазимаксимальности Γ_0 полугруппа $[-a_0; \Gamma_0]$, порожденная элементом $-a_0$ и полугруппой Γ_0, совпадает с Γ, откуда для любого $a \in \Gamma_0$, $a \neq 0$ существует такое целое $n>$, что $b=na_0-a \in \Gamma_0$. Тогда $1 \equiv |\pi(a_0)|^n = |\pi(a)|\,|\pi(b)|$ и так как $\|\pi(a)\| \leq 1$, $\|\pi(b)\| \leq 1$, то $|\pi(a)| \equiv 1$ на X.

Разобьем доказательство на два случая. Предположим $M_A=X$. Тогда все функции $\pi(a)$ обратимы в A и $\overline{\pi(a)}=\pi(a)^{-1} \in A$, т. е. алгебра A самосопряженная, и по теореме Стоуна—Вейерштрасса $A=C(X)$.

Рассмотрим теперь случай, когда $M_A \neq X$. Пусть

$$\tau: M_A \to \mathrm{Hom}\,\Gamma_0,\quad \tau(\varphi)(a)=\varphi(\pi(a)),\quad \varphi \in M_A,\ a \in \Gamma_0.$$

Положим $K=\tau(M_A)$. Ясно, что гомеоморфизм $\tau: M_A \to K$ задает изоморфизм между алгеброй $\hat{A}$ преобразований Гельфанда алгебры A и $A_0(K)$—равномерного замыкания сужений гельфандовских преобразований $A(\Gamma_0)$ на K. Границей Шилова ∂_A алгебры A является компакт X, так что теорема будет доказана, если покажем, что $\partial A_0(K)=\hat{\Gamma}$. Обозначим через $K_0=\partial A_0(K)$. Так как $\hat{A}$ изоморфна $A_0(K)$, то X гомеоморфно K_0. Для любого $\zeta \in K_0$ существует $\varphi \in X$ такой, что $\zeta=\tau(\varphi)$.

Тогда $\zeta(a)=\pi(\varphi)(a)=\pi(a)(\varphi)$, $a\in\Gamma_0$, и, так как $|\pi(a)|\equiv 1$ на X, то $|\zeta(a)|=1$ для всех $a\in\Gamma_0$, т. е. $\zeta\in\hat{\Gamma}$. Таким образом $K_0\subseteq\hat{\Gamma}$. Допустим $K_0\neq\hat{\Gamma}$. Тогда, поскольку по теореме 2 алгебра $A(\Gamma_0)$ проникающая, то $A_0(K_0)=C(K_0)$, откуда $M_{A_0(K_0)}=K_0$. Далее, при доказательстве леммы по ходу получили, что $M_{A_0(K)}=K$. Окончательно, $K=M_{A_0(K)}=M_{A_0(K_0)}=K_0$. А это, вопреки предположению, означает, что $M_A\approx X$ $(M_A\approx K=K_0\approx X)$. Теорема доказана.

В частности, когда A антисимметрична, пространство M_A гомеоморфно конусу $\hat{\Gamma}\times[0,1]/\hat{\Gamma}\times\{0\}$, полученному из декартова произведения $\hat{\Gamma}\times[0,1]$ путем отождествления в точку слоя $\hat{\Gamma}\times\{0\}$, при этом на X задается структура компактной группы, изоморфной группе $\hat{\Gamma}$. (Для максимальной полугруппы Γ_+, $M_{A(\Gamma_+)}\approx\hat{\Gamma}\times[0,1]/\hat{\Gamma}\times\{0\}$ (6)).

Ереванский государственный
университет

Լ. Մ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

Քվազիմաքսիմալ կիսախմբերի ներկայացումներ հավասարաչափ հանրահաշվի մեջ

Դիցուք Γ-ն իրական թվերի խմբի որոշ ենթախումբ է, ծնված միավոր պարունակող Γ_0 սեփական ենթակիսախմբերով, $\hat{\Gamma}$-ն Γ-խմբի համալուծ խումբն է, իսկ $A(\Gamma_0)$-ն χ_a, $a\in\Gamma_0$ $(\chi_a(\alpha)=\alpha(a),\ \alpha\in\hat{\Gamma})$ բնութագրիչներով ծնված հավասարաչափ հանրահաշիվն է։

Հոդվածում շարունակվում է (5) աշխատանքում ներմուծված քվազիմաքսիմալ կիսախմբերի ուսումնասիրությունը։ Ապացուցվում է, որ Γ_0-ն քվազիմաքսիմալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $A(\Gamma_0)$-ն ներթափանցող հանրահաշիվ է։

Լուծվում է հետևյալ ապրոքսիմացիոն խնդիրը՝ X կոմպակտի վրա դիտարկվում է A հավասարաչափ հանրահաշիվ, ծնված Γ_0 քվազիմաքսիմալ կիսախմբին իզոմորֆ $\{f_a\}a\in\Gamma_0$ ֆունկցիաների մուլտիպլիկատիվ ընտանիքով։ Ապացուցվում է, որ եթե որևէ a-ի համար, $a\neq 0$, տեղի ունի $|f_a|\equiv 1$, ապա կամ $A=C(X)$, կամ A-ն իզոմորֆ է $A(\Gamma_0)$-ին։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *R. Arens, I. Singer*, Trans. Amer. Math. Soc., v. 81, p. 379–393 (1955). [2] *E. A. Горин.* Мат. заметки, т. 1, № 2, с. 173–178 (1967). [3] *С. А. Григорян, Т. В. Тонев*, Докл. БАН, т. 33, № 1, с. 25—27 (1980). [4] *Л. М. Акопян, С. А. Григорян*, Докл. БАН, т. 38, № 7, с. 829–830 (1985). [5] *Л. М. Акопян*, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 22, № 2, с. 152–165 (1987). [6] *Т. Гамелин*, Равномерные алгебры, Мир, М., 1973. [7] *K. Hoffman, I. Singer*, Id. Acta Math. v., 103, p. 217 (1960).