

УДК 517.984.46

МАТЕМАТИКА

И. М. Фалькоич

Поведение младших собственных значений самосопряженных операторов с параметром

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. Б. Нерсисяном 10/VII 1989)

Вопросы о поведении собственных значений самосопряженных операторов с параметром возникают в механике, теории случайных блужданий, квантовой теории твердого тела, при изучении дифференциальных и псевдодифференциальных операторов в расширяющихся областях. Несмотря на прикладную важность предмета изучен он довольно слабо.

В настоящей работе приводится одна теорема теории возмущений линейных операторов, которая позволяет сводить изучение поведения собственных значений самосопряженного оператора с параметром к изучению собственных значений близкого к нему в определенном смысле более просто исследуемого оператора с параметром. В качестве примера использования этой теоремы приведены результаты об асимптотике крайних собственных значений операторов дискретной свертки с операторнозначными символами.

1°. Пусть A_τ, B_τ — два семейства самосопряженных, вообще говоря, неограниченных линейных операторов с параметром $\tau \in (0, +\infty)$, действующих в гильбертовом пространстве H .

Предположим, что для операторов A_τ и B_τ выполнено условие:

1) $\forall \tau (> 0) \exists M_\tau (0 < M_\tau < +\infty)$: $\sigma(A_\tau) \cap (0, M_\tau)$ и $\sigma(B_\tau) \cap (0, M_\tau)$ — дискретные множества, состоящие из конечнократных собственных значений операторов A_τ и B_τ соответственно, не имеющие предельных точек;

кроме того, существует плотный в H линейал D такой, что:

2) D — общая существенная область квадратичных форм, порожденных операторами A_τ и B_τ , $\forall \tau (> 0)$;

3) $D \subset D(A_\tau) \cap D(B_\tau)$, $\forall \tau (> 0)$ и $\forall u \in D$ $(A_\tau - B_\tau)u \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow +\infty$.

Из свойства 1) следует, что собственные значения операторов A_τ и B_τ могут быть упорядочены по неубыванию: пусть это $\lambda_{1,\tau} \leq \lambda_{2,\tau} \leq \dots \leq \lambda_{k,\tau} \leq \dots$ и $\mu_{1,\tau} \leq \mu_{2,\tau} \leq \dots \leq \mu_{s,\tau} \leq \dots$ соответственно, выписанные с учетом кратности. Пусть $\varphi_{\lambda_{k,\tau}}$ — нормированный собственный вектор оператора A_τ , соответствующий $\lambda_{k,\tau}$, $\psi_{\mu_{s,\tau}}$ — нормированный вектор оператора B_τ , соответствующий $\mu_{s,\tau}$.

Пусть $\Pi, \Pi_1 \in \mathbb{R}_+$ — неограниченные счетные подмножества, не имеющие конечных предельных точек, причем $\exists k, s$ — натуральные такие, что $\forall \tau \in \Pi \exists \lambda_{k,\tau}$ и $\forall \tau \in \Pi_1 \exists \mu_{s,\tau}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 4) а) $\exists P'(\subset P) \exists \varphi_k(\in H) : \varphi_{k,\tau} \rightarrow \varphi_k$ сильно,
 б) $\exists P'_1(\subset P_1) \exists \psi_s(\in H, \psi_s \neq 0) : \psi_{s,\tau} \rightarrow \psi_s$ слабо;
 5) $\forall z(\operatorname{Im} z \neq 0) \forall \{u_\tau\}_{\tau \in \Pi} (\subset D, \|u_\tau\|_H \leq c < \infty) :$
 $\{ \langle [A_\tau - (\lambda_{k,\tau} + z) / \|u_\tau\|, v] \rangle_{\tau \in \Pi} \rightarrow 0 \forall v(\in D) \} \rightarrow$
 $\rightarrow \{u_\tau \rightarrow 0 \text{ слабо} \}_{\tau \in \Pi}.$

Здесь $\langle \dots \rangle$ означает скалярное произведение в гильбертовом пространстве H .

Пусть D — линейал в H , о котором идет речь в условиях 2), 3) и 5). Свойства 2) и 3) означают, что замыкание сильного предела $(^1)$ разности операторов A_τ и B_τ — это нуль-оператор; свойства 4) и 5) означают в каком-то смысле непрерывность семейств операторов A_τ и B_τ по параметру τ .

Для операторов A_τ и B_τ , удовлетворяющих условиям 1)–5), справедлива

Теорема 1. Пусть $\Pi(\subset \mathbb{R}_+)$, ν и $\lambda_\tau(\in \mathbb{R})$ таковы, что Π — неограниченное подмножество, не имеющее конечных предельных точек, ν — натуральное и $\forall \tau(\in \Pi) \exists \lambda_{\nu,\tau}, \exists \lambda_{\nu+1,\tau} \exists \delta(>0) : \forall \tau(\in \Pi) \lambda_\tau \in (\lambda_{\nu,\tau} + \delta, \lambda_{\nu+1,\tau} - \delta)$. Тогда

- а) $P_{(0,\lambda_\tau)}(A_\tau) - P_{(0,\lambda_\tau)}(B_\tau) \xrightarrow{\tau \in \Pi} 0$ в сильной операторной топологии;
 б) $\lim_{\tau \in \Pi} [\operatorname{dim} \operatorname{Im} P_{(0,\lambda_\tau)}(A_\tau) - \operatorname{dim} \operatorname{Im} P_{(0,\lambda_\tau)}(B_\tau)] = 0.$

Здесь $P_{(a,b)}(T)$ — спектральный проектор самосопряженного оператора $T: H \rightarrow H$, соответствующий интервалу (a, b) .

В приложениях часто используется

Следствие 1. Пусть Σ — множество тех натуральных значений ν , для которых существуют подпоследовательности $\Pi_\nu(\subset \mathbb{R}_+)$ такие, что $\forall \tau(\in \Pi_\nu) \exists \lambda_{\nu,\tau}$. Тогда $\forall \nu(\in \Sigma)$

$$\lambda_{\nu,\tau} - \mu_{\nu,\tau} \xrightarrow{\tau \in \Pi_\nu} 0.$$

Теорема 1 и ее следствие используются при исследовании различных классов операторов в конкретных функциональных пространствах.

2°. Пусть Ω — локально звездное подмножество в $\mathbb{R}^n$ $(^1)$, $\Omega_\tau = \Omega \cap \tau^{-1} \cdot Z^n$, где $\tau(>0)$ — числовой параметр; пусть $Q_\tau = \{\xi(\in \mathbb{R}^n) : |\xi_i| \leq \pi \cdot \tau\}$ — n -мерный куб с ребром $2\pi \cdot \tau$.

Для гильбертова пространства H через $L_2(\Omega; H)$ обозначается пространство сильно измеримых суммируемых с квадратом функций со значениями в H , обращающихся в ноль вне Ω . Норма в $L_2(\Omega; H)$ задается равенством

$$\|f\|_{L_2(\Omega; H)} = \left(\int_{\Omega} \|f(x)\|_H^2 dx \right)^{1/2}.$$

$L_2(\Omega_\tau; H)$ — это пространство функций на $\tau^{-1} \cdot Z^n$, обращающихся в ноль вне Ω_τ , со значениями в H , норма в котором задается следующим равенством

$$\|\varphi\|_{L_2(\Omega_\tau; H)} = \tau^{-n/2} \cdot \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}^n} \|\varphi(p)\|_H^2 \right)^{1/2}.$$

Пусть $A_\tau(\xi)$ — измеримая суммируемая на Q_τ оператор-функция, значения которой — ограниченные операторы, действующие в H ; $\forall \xi \notin Q_\tau$ $A_\tau(\xi) = 0$. Пусть $\forall p \in \tau^{-1} \cdot \mathbb{Z}^n$ $a_{\tau,p} : H \rightarrow H$ — ограниченный оператор, определяемый следующим образом:

$$a_{\tau,p} = (2\pi\tau)^{-n} \int_{Q_\tau} e^{-i(p,\xi)} A_\tau(\xi) d\xi$$

(суммирование в сильной операторной топологии). Оператор $A_\tau(\Omega_\tau) : L_2(\Omega_\tau; H) \rightarrow L_2(\Omega_\tau; H)$ с символом $A_\tau(\xi)$ определяется равенством: $\forall u \in L_2(\Omega_\tau; H) \quad \forall p \in \tau\Omega_\tau$

$$(A_\tau(\Omega_\tau)u)(p) = \sum_{q \in \tau\Omega_\tau} a_{\tau,p-q} u(q).$$

Очевидно, что $A_\tau(\Omega_\tau)$ — оператор дискретной свертки с операторными коэффициентами.

Пусть $a : H \rightarrow H$ — ограниченный положительный оператор такой, что $\inf\{\lambda : \lambda \in \sigma(a)\} = \lambda_0$ — собственное значение конечной кратности и $\inf\{\lambda : \lambda \in \sigma(a) \setminus \{\lambda_0\}\} = \lambda'_0 > \lambda_0$; пусть $H_0 = \text{Ker}(a - \lambda_0 I) \subset H$ (согласно предположению, $\dim H_0 < \infty$). Пусть $\Phi(\Theta)$ — оператор-функция, заданная на единичной сфере пространства $\mathbb{R}^n$, суммируемая на ней в сильной операторной топологии; значения ее — ограниченные симметричные операторы в H , удовлетворяющие условию: $\exists c(>1) : \forall \Theta (|\Theta| = 1) \quad c^{-1} \cdot I \leq \Phi(\Theta) \leq c \cdot I$. Пусть $\Phi_0(\xi) = |\xi|^\alpha \Phi(\xi/|\xi|)$, где $\alpha > 0$. Пусть, наконец, $\Phi_1(\xi)$ — суммируемая на любом ограниченном множестве в $\mathbb{R}^n$ оператор-функция, значения которой — положительные ограниченные операторы в H , причем $\exists \gamma(\geq \alpha > 0) \exists c_1(>0) : \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \|\Phi_1(\xi)\| \leq c_1 \cdot |\xi|^\gamma$ и при $\xi \rightarrow 0 \quad \|\Phi_1(\xi)\| = O(|\xi|^\alpha)$.

Рассматриваются два класса операторов дискретной свертки $A_\tau(\Omega_\tau)$ и $A_{\tau,1}(\Omega_\tau)$ с символами

$$A_\tau(\xi) = \begin{cases} a + \Phi_0(\tau^{-1} \cdot \xi) = a + \tau^{-\alpha} \Phi_0(\xi), & \xi \in Q_\tau, \\ 0, & \xi \notin Q_\tau, \end{cases} \quad \text{и} \quad A_{\tau,1}(\xi) = \begin{cases} a + \Phi_0(\tau^{-1} \cdot \xi) + \Phi_1(\tau^{-1} \cdot \xi) = A_\tau(\xi) + \Phi_1(\tau^{-1} \cdot \xi), & \xi \in Q_\tau, \\ 0, & \xi \notin Q_\tau. \end{cases}$$

Для этих операторов справедлива

Теорема 2. $\forall \tau(>0) \quad \sigma(A_\tau(\Omega_\tau)) \cap (0, \lambda'_0)$ и $\sigma(A_{\tau,1}(\Omega_\tau)) \cap (0, \lambda'_0)$ — множества, состоящие из конечнократных собственных значений и не имеющие предельных точек, меньших λ_0 .

Пусть $\lambda_{1,\tau} \leq \lambda_{2,\tau} \leq \dots \leq \lambda_{k,\tau} \leq \dots$ — собственные значения оператора $A_\tau(\Omega_\tau)$ и $\lambda_{1,\tau}^{(1)} \leq \lambda_{2,\tau}^{(1)} \leq \dots \leq \lambda_{k,\tau}^{(1)} \leq \dots$ — собственные значения оператора $A_{\tau,1}(\Omega_\tau)$, лежащие на интервале $(0, \lambda'_0)$ и выписанные с учетом кратности.

С помощью методов, изложенных в (2), и пробных функций, которые выписываются явно, доказывается

Теорема 3. $\forall \nu \in \mathbb{Z}_+, \quad \lambda_{\nu,\tau} = \lambda_0 + \lambda_0^{(\nu)} \cdot \tau^{-\alpha} + o(\tau^{-\alpha})$ при $\tau \rightarrow +\infty$, где λ_0 — младшее собственное значение оператора $a : H \rightarrow H$, $\rho_0 : H \rightarrow H$ —

ортогональный проектор на конечномерное подпространство $H_0 = \text{Ker}(a - i_0 I) \subset H$, $\Phi_0(\xi) (= p_0 \Phi_0(\xi)|_{H_0})$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ — конечномерная оператор-функция, $\Phi_0(D, \Omega): L_2(\Omega; H) \rightarrow L_2(\Omega; H)$ — псевдодифференциальный оператор с операторнозначным символом $\Phi_0(\xi)$ и, наконец, $\lambda_0^{(1)} \leq \lambda_0^{(2)} \leq \dots \leq \lambda_0^{(v)} \leq \dots$ — собственные значения оператора $\Phi_0(D, \Omega)$, перенумерованные в неубывающем порядке с учетом кратности.

Теорема 1 позволяет доказать аналогичное утверждение для собственных значений оператора $A_{\tau,1}(\Omega)$:

Теорема 4. $\forall \tau \in \mathbb{Z}_+$ $\lambda_{v,\tau}^{(1)} = \lambda_{v,\tau} + o(\tau^{-\alpha}) = i_0 + i_0^{(v)} \cdot \tau^{-\alpha} + o(\tau^{-\alpha})$ при $\tau \rightarrow +\infty$.

Для того чтобы стало возможным использование в доказательстве этой теоремы теоремы 1 и ее следствия, вводится интерполирующее семейство операторов $\{I_\tau: L_2(\Omega; H) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n; H)\}_{\tau>0}$, определяемых следующим образом: $\forall \tau (>0) \forall u \in L_2(\Omega; H) \forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$(I_\tau u)(x) = (2\pi\tau)^{-n} \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} \int_{Q_\tau} e^{i(p-x, \xi)} d\xi \cdot u(p).$$

С помощью этих операторов строятся операторы $\mathfrak{M}_\tau$ и $\mathfrak{M}_{\tau,1}$, подобные $A_\tau(\Omega)$ и $A_{\tau,1}(\Omega)$ соответственно, действующие в едином для всех значений $\tau (>0)$ пространстве $L_2(\mathbb{R}^n; H)$. Вследствие подобия $\sigma(A_\tau(\Omega)) = \sigma(\mathfrak{M}_\tau)$ и $\sigma(A_{\tau,1}(\Omega)) = \sigma(\mathfrak{M}_{\tau,1})$, поэтому, применяя к $\tau^\alpha \cdot \mathfrak{M}_\tau$ и $\tau^\alpha \cdot \mathfrak{M}_{\tau,1}$ теорему 1, получаем соответствующее утверждение о спектральных проекторах операторов $\tau^\alpha \cdot A_\tau(\Omega)$ и $\tau^\alpha \cdot A_{\tau,1}(\Omega)$, из которого следует теорема 4.

Результаты, касающиеся операторов дискретной свертки с операторнозначными символами, могут быть использованы при идентификации динамических систем ⁽³⁾, где возникает вопрос об обратимости и оценке нормы, обратной к положительно определенной расширяющейся блочной теплицевой матрице, т. е. когда необходимо оценить поведение младшего собственного значения этой матрицы.

Ростовский инженерно-строительный институт

Н. И. ЗАКЛАДЧИК

Պարամետր ունեցող ինֆնահամալուծ օպերատորների փոփոխական արժեքների վարվելակարգը

Աշխատանքը նվիրված է գծային օպերատորների տեսության մի թևորեն մի ապացուցմանը: Այն հնարավորություն է տալիս պարամետր ունեցող ինֆնահամալուծ օպերատորների սեփական արժեքների դիտարկումը բերել նրան որոշ իմաստով մոտ գտնվող ավելի պարզ եղանակով հետազոտվող պարամետր ունեցող օպերատորի սեփական արժեքների հետազոտմանը:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ I. I. Hirschman, Gr., D. E. Hughes, Existence eigenvalues of Toeplitz operators, Lect. Notes in Math., v. 618, Berlin, 1977. ² М. И. Вушак, Л. А. Люстерник, УМН, т. 12, вып. 5, с. 3—122 (1957). ³ L. Liang, Z. Yuan, IEEE Trans. Autom. Control, v. AC-30, № 6, p. 514—531 (1985).