ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Том 89 1989 № 5

УДК 519.92

МАТЕМАТИКА

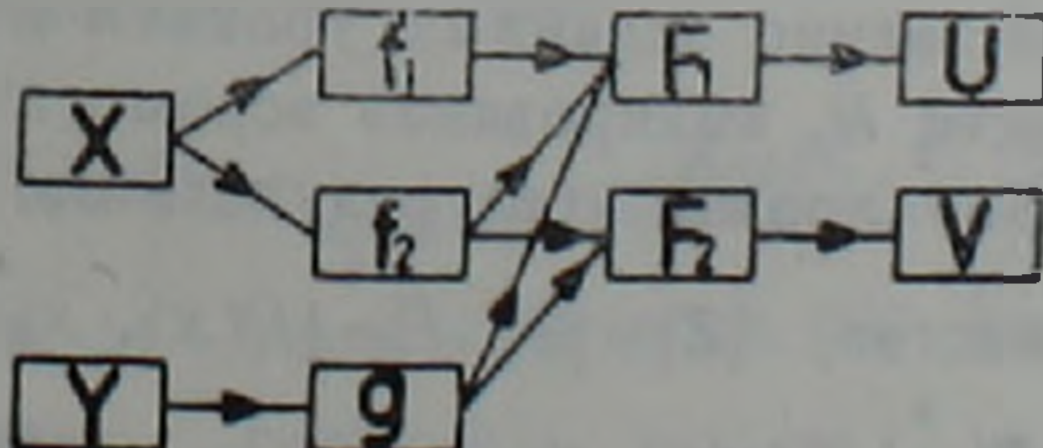
Е. А. Арутюнян, Р. Ш. Марутян

(E, Δ)-достижимые скорости множественного описания источника при неполной дополнительной информации на декодерах

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 28/VII 1989)

Дискретный случайно меняющийся источник без памяти $\{X, Y\}$ задается как последсвательность $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^{\infty}$ независимо одинаково распределенных пар случайных величин (X, Y), принимающих значения в конечных множествах $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, соответственно. Каждая из последовательностей $\{(X_i)\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{Y_i)\}_{i=1}^{\infty}$ может быть рассмотрена как обычный дискретный источник без памяти. Источник $\{X\} \overset{\Delta}{=} \{(X_i)\}_{i=1}^{\infty}$ является основным источником, сообщения которого должны быть восстановлены декодерами, а вспомогательный источник $\{Y\} \overset{\Delta}{=} \{(Y_i)\}_{i=1}^{\infty}$ генерирует последовательность состояний, сведения о которых используются лишь для лучшего восстановления сообщений основного источника.

Рассматриваются оптимальные возможности кодирования источника $\{X\}$ двумя кодерами и двумя декодерами при наличии на декодерах закодированной информации о состояниях, генерируемых источником $\{Y\}$. Причем (см. рисунок) на первом декодере имеется информация от двух кодеров основного источника и вспомогательного источника, а на второй декодер поступает информация от одного кодера основного и кодера вспомогательного источников. Отметим, что исследуемая конфигурация связей не сводится к более простым ранее изученным случаям ([1-3]).



Пусть случайно меняющийся источник $\{X, Y\}$ имеет распределение $P^* \circ W^* \overset{\Delta}{=} \{P^* \circ W^*(x, y) = P^*(x) W^*(y|x)\}$, при этом

$$P^*(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} P^*(x_i), \quad W^*(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} W^*(y_i|x_i).$$

Имеется два конечных множества $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$, $|\mathcal{U}| = |\mathcal{V}| = |\mathcal{X}|$, называемых алфавитами воспроизведения. Последовательности $\mathbf{u} \in \mathcal{U}^n$ и $\mathbf{v} \in$

$\in \mathcal{V}^n$ рассматриваются как возможные варианты восстановления вектора $x \in \mathcal{X}^n$. Функции $d_1 : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to [0, \infty)$, $d_2 : \mathcal{X} \times \mathcal{V} \to [0, \infty)$ задают две меры искажения векторов сообщений

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d_1(x_i, u_i), \quad d_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d_2(x_i, v_i), \tag{1}$$

на соответствующих декодерах.

Блочный код длины n определим как шестерку отображений $(f, g, F) \stackrel{\Delta}{=} (f_1, f_2, g, F_1, F_2)$, где $f_1 : \mathcal{X}^n \to \{l_1, \ldots, l_{L(n)}\}$, $f_2 : \mathcal{X}^n \to \{k_1, \ldots, k_{K(n)}\}$, $g : \mathcal{Y}^n \to \{a_1, \ldots, a_{A(n)}\}$, задают кодирование, а $F_1 : \{l_1, \ldots, l_{L(n)}\} \times \{k_1, \ldots, k_{K(n)}\} \times \{a_1, \ldots, a_{A(n)}\} \to \mathcal{U}^n$, $F_2 : \{k_1, \ldots, k_{K(n)}\} \times \{a_1, \ldots, a_{A(n)}\} \to \mathcal{V}^n$ декодирование.

Вероятности $e_{1,n}$ и $e_{2,n}$ превышения соответственно уровней искажения $\Delta_1 \geqslant 0$ и $\Delta_2 \geqslant 0$, заданных на первом и втором декодерах, определятся следующим образом:

$$e_{1,n} = e_1(f_1, f_2, g, F_1, d_1, \Delta_1, n) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : d_1(\mathbf{x}, F_1(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \mathbf{y}(\mathbf{y}))) > \Delta_1} P^*(\mathbf{x}) W^*(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \tag{2}$$

$$e_{2,n} = e_2(f_2, g, F_2, d_2, \Delta_2, n) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : d_2(\mathbf{x}, F_2(f_2(\mathbf{x}), g(\mathbf{y}))) > \Delta_2} P^*(\mathbf{x}) W^*(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \tag{3}$$

Два неотрицательных числа R_1, R_2 будем называть $(E, \Delta, R_3) \stackrel{\Delta}{=} (E_1, E_2, \Delta_1, \Delta_2, R_3)$-достижимыми скоростями, если для любого $\varepsilon > 0$ при $n \geqslant n(\varepsilon, E_1, E_2, \Delta_1, \Delta_2, R_3)$ существует код (f, g, F) удовлетворяющий условиям

$$e_{1,n} \leqslant \exp\{-nE_1\}, \quad e_{2,n} \leqslant \exp\{-nE_2\}, \tag{4}$$

и такой, что

$$\frac{1}{n} \log L(n) \leqslant R_1 + \varepsilon, \quad \frac{1}{n} \log K(n) \leqslant R_2 + \varepsilon, \quad \frac{1}{n} \log A(n) \leqslant R_3 + \varepsilon.$$

Область (E, Δ, R_3)-достижимых скоростей обозначим $\mathcal{R}(E, \Delta, R_3)$. В статье приведены внешняя и внутреняя границы области $\mathcal{R}(E, \Delta, R_3)$, в виде функции от заданной пары экспонент E_1, E_2 вероятностей превышения, соответственно заданных уровней искажения Δ_1, Δ_2 при фиксированной скорости R_3 кодирования вспомогательного источника.

Перейдем к формулировке этих результатов. Пусть Z некоторое конечное множество, $|Z| = |\mathcal{Y}|$, $P \stackrel{\Delta}{=} \{P(x), x \in \mathcal{X}\}$ — распределение на множестве $\mathcal{X}$, $W \stackrel{\Delta}{=} \{W(y|x), x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}\}$ — матрица условных вероятностей на множестве $\mathcal{Y}$ при заданных $x \in \mathcal{X}$, $Q \stackrel{\Delta}{=} \{Q(u, v(x), u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{V}, x \in \mathcal{X}\}$ — матрица условных вероятностей пар $(u, v) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ при заданных $x \in \mathcal{X}$ и $G \stackrel{\Delta}{=} \{G(z|y), y \in \mathcal{Y}, z \in Z\}$ — матрица условных вероятностей на множестве Z при заданных $y \in \mathcal{Y}$.

Нам нужны следующие обозначения для соответствующих дивергенций и взаимной информации ([4]):

$$D(P\|P^*)\overset{\Delta}{=}\sum_x P(x)\log\frac{P(x)}{P^*(x)},$$

$$D(P\circ W\|P^*\circ W^*)\overset{\Delta}{=}\sum_{x,y} P(x)W(y|x)\log\frac{P(x)W(y|x)}{P^*(x)W^*(y|x)},$$

$$I_{P,W}(X\wedge Y)\overset{\Delta}{=}\sum_{x,y} P(x)W(y|x)\log\frac{W(y|x)}{\sum_x P(x)W(y|x)}.$$

Пусть $\alpha(E)\overset{\Delta}{=}\{P,W: D(P\circ W\|P^*\circ W^*)\leqslant E\}$, $\alpha_0(E)\overset{\Delta}{=}\{P: D(P\|P^*)\leqslant E\}$.

Определим функцию $\Phi(P)=Q_P\overset{\Delta}{=}\{Q_P(u,v|x),\ x\in\mathscr{X},\ u\in\mathscr{U},\ v\in\mathscr{V}\}$, задающую соответствие некоторого Q каждому P такое, что если $D(P\|P^*)\leqslant E_1$, то

$$M_{P,\Phi(P)}d_1(X,V)\overset{\Delta}{=}\sum_{x,u,v}P(x)Q(u,v|x)d_1(x,u)\leqslant\Delta_1,$$

и если $D(P\|P^*)\leqslant E_2$, то $M_{P,\Phi(P)}d_2(X,V)\leqslant\Delta_2$. Аналогично определим функцию $\psi(P,W)=G_{P,W}\overset{\Delta}{=}\{G_{P,W}(z|y),\ y\in\mathscr{Y},\ z\in Z\}$, задающую соответствие некоторого G паре P, W такое, что $I_{P,\psi(P,W)}(Y\wedge Z)\leqslant R_3$. Пусть $\mathfrak{M}(E,\Delta)$ — множество всех функций Φ при заданных $E=(E_1,E_2)$, $\Delta=(\Delta_1,\Delta_2)$ и $\mathfrak{M}(R_3)$ — множество всех ψ при заданной R_3.

Обозначим через $\mathfrak{R}(E,\Delta,R_3,\Phi,\psi)$ множество пар R_1, R_2, для которых выполняются следующие условия:

$$R_1+R_2\geqslant\min\{\max_{P,W\in\alpha(E_1)}|I_{P,W,\Phi(P),\psi(P,W)}(X\wedge UV|Z)+$$
$$+E_1-D(P\circ W\|P^*\circ W^*)|;\ \max_{P\in\alpha_0(E_1)}I_{P,\Phi(P)}(X\wedge UV)\},$$
$$R_2\geqslant\min\{\max_{P,W\in\alpha(E_2)}|I_{P,W,\Phi(P),\psi(P,W)}(X\wedge V|Z)+$$
$$+E_2-D(P\circ W\|P^*\circ W^*)|;\ \max_{P\in\alpha_0(E_2)}I_{P,\Phi(P)}(X\wedge V)\}.$$

Назовем областью «случайного кодирования» множество

$$\mathfrak{R}_r(E,\Delta,R_3)\overset{\Delta}{=}\bigcup_{\Phi\in\mathfrak{M}(E,\Delta)}\ \bigcup_{\psi\in\mathfrak{M}(R_3)}\mathfrak{R}_r(E,\Delta,R_3,\Phi,\psi), \quad (5)$$

а областью «сферической упаковки» —

$$\mathfrak{R}_{sp}(E,\Delta,R_3)\overset{\Delta}{=}\bigcup_{\Phi\in\mathfrak{M}(E,\Delta)}\ \bigcup_{\psi\in\mathfrak{M}(R_3)}\mathfrak{R}_{sp}(E,\Delta,R_3,\Phi,\psi), \quad (6)$$

где $\mathfrak{R}_{sp}(E,\Delta,R_3,\Phi,\psi)$ — множества всех пар R_1, R_2, для которых выполняются условия

$$R_1+R_2\geqslant\max_{P,W\in\alpha(E_1)}I_{P,W,\Phi(P),\psi(P,W)}(X\wedge UV|Z),$$
$$R_2\geqslant\max_{P,W\in\alpha(E_2)}I_{P,W,\Phi(P),\psi(P,W)}(X\wedge V|Z).$$

Теорема. *Для любых положительных E_1, E_2, Δ_1, Δ_2, R_3 имеют место следующие включения:*

$$\mathfrak{R}_r(E,\Delta,R_3)\subseteq\mathfrak{R}(E,\Delta,R_3)\subseteq\mathfrak{R}_{sp}(E,\Delta,R_3).$$

Отметим, что постановка задачи возникла как обобщение случаев, изученных в ([1-7]). Доказательство теоремы использует комбинаторные методы, предложенные в ([4,8,9]) и развитые в ([3]).

Вычислительный центр Академии наук
Армянской ССР и Ереванского
государственного университета

Ե. Ա. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Ռ. Շ. ՄԱՐՈՒԹՅԱՆ

Ապակոդավորիչներում ոչ լրիվ լրացուցիչ տեղեկությունների դեպքում աղբյուրի բազմակի նկարագրման (E, Δ)-հասանելի արագություններ

Դիսկրետ պատահականորեն փոփոխվող հիշողություն չունեցող աղբյուրի հիմնական X աղբյուրի հաղորդագրությունների հաջորդականությունները կոդավորվում են երկու կոդավորիչներով և ապակոդավորվում են երկու ապակոդավորիչներով, համակարգի հանգույցները կապված են գծագրում նշված ձևով։ Ապակոդավորիչներում ստացվող հաղորդագրությունների և աղբյուրի ստեղծած հաղորդագրությունների հաջորդականությունների շեղումը չափվում է (1)-ում տրված համապատասխանորեն երկու գծային չափերի միջոցով։

(2) և (3)-ում սահմանված է առաջին և երկրորդ ապակոդավորիչներում շեղումների տրված համապատասխանորեն Δ_1,Δ_2 մակարդակներից ավելին լինելու հավանականությունների սահմանումները։ Պահանջելով այդ հավանականությունների (4)-ում նշված ցուցչային նվազում, որոնվում են այդ նվազումը ապահովող X-ի կոդավորման R_1, R_2 փոքրագույն արագությունները F_1, E_2 ցուցիչներից, Δ_1,Δ_2 մակարդակներից և Y օժանդակ աղբյուրի R_3 կոդավորման արագությունից կախված։ Լավագույն հասանելի արագությունների $\Re(E, \Delta, R_3)$ տիրույթի արտաքին և ներքին տիրույթները տրված են (5) և (6) բանաձևերում։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *R. M. Gray, A. D. Wyner*, Bell Syst. J., v. 58, p. 1681—1721 (1974). [2] *C. Heegard, T. Benger*, IEEE Trans. Inf. Theory, p. 727—7 34, v. 31, № 6, (1985). [3] *P. Ш. Марутян*, Проблемы передачи информации, т. 25, №4, с. 24—34 (1989). [4] *И. Чисар, Я. Кёрнгр*, Теория информации. Теоремы кодирования для дискретных систем без памяти. Мир, М., 1985. [5] *Е. А. Арутюнян*, Journal of Jnform., v., 20, №20, p. X (1989) Processing and Cybernetics. [6] *S. I. Gelfand, M. S. Pinsker*, Problems of Control. and Inform. Theory, v. 14. № 15, p. 319—328 (1985). [7] *R. Ahlswede*. IEEE Trans. on Inform. Theory., v. 36, № 6 p. 721—726 (1985). [8] *Е. А. Арутюнян*. Межвуз. сб научн. трудов. Матем. Вып. 1, с. 213—220, Ереван (1982). [9] *R. Ahlswede* I, 2. Journal of Combinatorics, Inform. and System Sciences, v. 4, № 1, p. 76—115 (1979), v. 5, № 2, p. 220—268 (1' 80).