ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Том 89 1989 № 4

УДК 539.3

МЕХАНИКА

С. О. Саркисян

Вариационное уравнение магнитоупругости проводящих тонких оболочек

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 18/IV 1989)

В работах [1-6] на основе вариационного уравнения механики сплошных сред [7,8] получены динамические уравнения, уравнения состояния, соотношения на поверхности разрыва и граничные условия, описывающие электромагнитное поле и сплошную среду.

В работах [9-12] на основе гипотез магнитоупругости тонких тел или асимптотического метода интегрирования всех групп уравнений трехмерной магнитоупругости построена математическая теория магнитоупругости тонких оболочек и пластин. В работах [10,13,14] изучена энергетика явления и доказаны некоторые энергетические теоремы двумерной теории магнитоупругости тонких оболочек.

В данной работе впервые формулируется вариационное уравнение двумерной теории магнитоупругости тонких оболочек. Оно позволяет довольно простым путем получить основные соотношения и граничные условия теории магнитоупругости тонких оболочек, а также является исходным для построения вариационных методов решения задач теории магнитоупругости тонких оболочек.

1. Рассмотрим однородную и изотропную упругую среду, характеризуемую конечной электропроводностью σ. Механическое состояние упругой среды, как и всегда, определяется тензором упругих деформаций $2e_{ij}=u_{i,j}+u_{j,i}$, где $u=\{u_1, u_2, u_3\}$ — вектор смещения точек среды. Пусть среда обладает плотностью свободных электрических зарядов ρ_e и по ней текут электрические токи, плотность которых j, кроме того, следует учитывать электромагнитное поле, определяемое векторным A и скалярным φ потенциалами, которые связаны с напряженностью электрического поля E и магнитной индукцией B соотношениями [15]:

$$E=-\nabla\varphi-c^{-1}\frac{\partial A}{\partial t},\quad B=\mathrm{rot}A. \tag{1.1}$$

Для получения уравнений движения, описывающих динамическое поведение магнитоупругой среды, воспользуемся вариационным принципом (уравнением) Гамильтона

$$\delta S=\delta\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{V_0}L\,dv\,dt=0, \tag{1.2}$$

где для плотности функции Лагранжа выбирается следующее выражение ([1]):

$$L = \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 - \rho \cdot U(e_{ij}) + \frac{1}{8\pi}(E^2 - B^2) + c^{-1} j \cdot A - \rho_e \cdot \varphi. \tag{1.3}$$

Варьирование действия S по u при постоянных A и φ дает динамические уравнения теории упругости

$$\rho a_i = \nabla_j \sigma_i^j + R_i, \quad R_i = \frac{1}{c}\varepsilon_{ijk} j^j \cdot B^k, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \tag{1.4}$$

где a_i—компоненты вектора ускорения среды, σ_i^j—компоненты тензора упругих напряжений, R_i—компоненты объемной пондеромоторной силы, ε_{ijk}—компоненты антисимметричного тензора Леви—Чивита.

Варьирование действия S по A и φ при постоянных u с учетом (1.1) дает уравнения электродинамики

$$\varepsilon^{ijk}\nabla_j H_k = \frac{1}{c}\frac{\partial D^i}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j^i, \quad \nabla_i D^i = 4\pi\rho_e. \tag{1.5}$$

К этим уравнениям следует добавить уравнения

$$\operatorname{div} B = 0, \quad \operatorname{rot} E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}, \tag{1.6}$$

которые выполняются тождественно, если вектора B и E выражены через потенциалы A и φ по формулам (1.1).

Из вариационного уравнения (1.2), (1.3), примененного к движению среды, одновременно формулируются соотношения на поверхности разрыва определяющих параметров среды и поля.

2. Рассмотрим изотропную оболочку постоянной толщины 2h как трехмерное, упругое, электропроводящее тело и отнесем ее к триортогональной инерциальной (неподвижной) системе координат ([17]).

Будем считать, что оболочка контактирует с внешней средой, электродинамические свойства которой отождествляются со свойствами вакуума ($\sigma = 0$, $\rho_e = 0$, $\mu = \varepsilon = 1$)

Пусть оболочка находится во внешнем стационарном магнитном поле с заданным вектором напряженности в области трехмерной оболочки $B_0 = (B_{01}, B_{02}, B_{03})$ с векторным потенциалом A_0 и в области окружающего пространства $B_0^{(e)} = (B_{01}^{(e)}, B_{02}^{(e)}, B_{03}^{(e)})$ с векторным потенциалом $A_0^{(e)}$:

$$B_0 = \operatorname{rot} A_0, \ \operatorname{div} A_0 = 0; \ B_0^{(e)} = \operatorname{rot} A_0^{(e)}, \ \operatorname{div} A_0^{(e)} = 0 \tag{2.1}$$

Для изучения магнитоупругих процессов в электропроводной, упругой оболочке будем исходить из вариационного уравнения (1.2) для линейной теории трехмерной магнитоупругости, которое будет выражаться следующим образом:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\int_{V_3}\frac{1}{2}\rho\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^2 dV dt - \int_{t_1}^{t_2}\int_{V_3}\sigma_{ij}\delta e_{ij}\, dV dt + \frac{1}{8\pi}\delta\int_{t_1}^{t_2}\int_{V_3} E^2 dV dt -$$

$$
-\frac{1}{8\pi}\delta\int_{t_1}^{t_2}\int_{V_3} h\,dV\,dt+c^{-1}\int_{t_1}^{t_2}\int_{V_3} j\cdot\delta A\,dV\,dt-c^{-1}\int_{t_1}^{t_2}\int_{V_3}\operatorname{rot}(j\cdot\delta u)A_0\,dV\,dt-
$$

$$
-\int_{t_1}^{t_2}\int_{V_3}\rho_e\cdot\delta\varphi\,dV\,dt+\frac{1}{8\pi}\delta\int_{t_1}^{t_2}\int_{V_3^*}E_{(e)}^2\,dV\,dt-\frac{1}{8\pi}\delta\int_{t_1}^{t_2}\int_{V_3^*}h_{(e)}^2\,dV\,dt=0. \qquad (2.2)
$$

Здесь V_3^*—трехмерная область вне внешней поверхности трехмерной оболочки до некоторой сферической поверхности Σ радиуса R, где $R\to\infty$; E, h—соответственно векторы индуцированных (возмущенных) электрических и магнитных полей в области трехмерной оболочки; $E_{(e)}$, $h_{(e)}$—аналогичные величины в окружающей оболочке области: j—возмущенный ток проводимости в оболочке. A, $A_{(e)}$—векторные, а φ, $\varphi_{(e)}$—скалярные потенциалы возбужденного электромагнитного поля.

Для существования объемных интегралов по V_3^* следует принимать во внимание условие на бесконечности [15], при котором убывание векторов электромагнитного поля с расстоянием должно происходить в общем случае быстрее, чем $1/R^{-1}$.

3. Наша цель заключается в том, чтобы приближенно свести вариационное уравнение (2.2) трехмерной линейной теории магнитоупругости (с независимыми переменными α_1, α_2, α_3 и времени t) к соответствующему уравнению двумерной теории магнитоупругости тонких оболочек (с независимыми переменными α_1, α_2 и времени t).

Решение поставленной проблемы базируется на асимптотическом методе, развитом в работах [10-14]. Удерживая в равенстве (2.7) все члены до порядка $O(\varepsilon^{-l+p})$, после некоторых преобразований приходим к уравнению:

$$
\frac{1}{2}2\rho h\delta\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right]A_1A_2\,d\alpha_1 d\alpha_2 dt-
$$

$$
-\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega}(T_1\delta\varepsilon_1+T_2\delta\varepsilon_2+S\delta\omega+M_1\delta\varkappa_1+M_2\delta\varkappa_2+2H\delta\tau)A_1A_2\,d\alpha_1 d\alpha_2 dt+
$$

$$
+\frac{1}{c}\int_{t_1}^{t}\int_{\Omega}(\bar{j}\delta A_1^0+\bar{j}_2\delta A_2^0)A_1A_2\,d\alpha_1 d\alpha_2 dt+
$$

$$
+\frac{1}{c}\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega}\left\{\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(\bar{j}_1\delta u_2-\bar{j}_2\delta u_1)A_{02}-\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(\bar{j}_1\delta u_2-\bar{j}_2\delta u_1)A_{01}-\right.
$$

$$
\left.-\left[\frac{1}{A_1A_2}\cdot\frac{\partial(A_2\bar{j}_1\delta w)}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\cdot\frac{\partial(A_1\bar{j}_2\delta w)}{\partial\alpha_2}\right]A_{03}\right\}A_1A_2\,d\alpha_1 A\alpha_2 dt+
$$

$$
+\frac{1}{8\pi}\delta\int_{t_1}^{t_2}\int_{V_3^*}(E_{(e)}^2+h_{(e)}^2)A_1A_2(1+k_1\alpha_3)(1+k_2\alpha_3)\,d\alpha_1 d\alpha_2 dt=0\cdot \qquad (3.1)
$$

Уравнение (3.1) представляет собой вариационное уравнение двумерной теории магнитоупругости тонких оболочек.

Здесь $\bar{j}_1$ и $\bar{j}_2$—компоненты поверхностного тока проводимости по срединной поверхности оболочки (или иначе усредненные токи по толщине оболочки), которые определяются формулами

$$\bar{j}_1=2h\cdot\sigma\cdot\left(E_{20}+\frac{B_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{B_{03}}{c}\frac{\partial u_1}{\partial t}\right),\quad \bar{j}_2=2h\sigma\left(E_{10}+\frac{B_{03}}{c}\frac{\partial u_2}{\partial t}-\frac{B_{02}}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial t}\right),\tag{3.2}$$

E_{i0}—тангенциальные компоненты индуцированного электрического поля, а A_i^0—тангенциальные компоненты векторного потенциала индуцированного магнитного поля в точках срединной поверхности оболочки. Здесь специально не приводится, но строго доказывается, что в рамках асимптотической погрешности $O(\lambda^{-l+p})$ компоненты A_k, $k=1, 2, 3$ ведут себя как постоянные по толщине оболочки.

При выводе вариационного уравнения (3.1) предполагалось, что компоненты заданного магнитного поля не зависят от поперечной координаты (α_3) оболочки. Изучая вопрос о возможности такого предположения, доказано, что в тонких оболочках в рамках асимптотической погрешности $O(\lambda^{-l+p})$ вполне реально существование такого магнитного поля, при этом уравнения (2.1) принимают вид:

$$B_{01}=\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_{30}}{\partial\alpha_2},\quad B_{02}=-\frac{1}{A_1}\frac{\partial A_{30}}{\partial\alpha_1},\quad B_{03}=\frac{1}{A_1A_2}\left(\frac{\partial(A_2A_{20})}{\partial\alpha_1}-\frac{\partial(A_1A_{10})}{\partial\alpha_2}\right),\tag{3.3}$$

где A_{k0}, $k=1, 2, 3$, не зависят от α_3.

4. Варьирование действия (3.1) по u_i и w при постоянных A_i^0, $i=1, 2$, с учетом (3.3) дает динамические уравнения теории тонких оболочек с учетом сил электромагнитного происхождения

$$\frac{\partial A_2T_1}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial A_1S}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}S-\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}T_2+\frac{1}{R_1}\left|\frac{\partial A_2M_1}{\partial\alpha_1}-\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}M_2+\right.$$
$$\left.+2\frac{\partial A_1H}{\partial\alpha_2}+2\frac{R_1}{R_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}H\right|+\frac{1}{c}\bar{j}_2\cdot B_{03}-2\rho h\frac{\partial^2u_1}{\partial t^2}=0.\tag{4.1}$$

$$\frac{\partial A_2S}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial A_1T_2}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}S-\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}T_1+\frac{1}{R_2}\left|\frac{\partial A_1M_2}{\partial\alpha_2}-\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}M_1+\right.$$
$$\left.+2\frac{\partial A_2H}{\partial\alpha_2}+2\frac{R_2}{R_1}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}H\right|-\frac{1}{c}\bar{j}_1\cdot B_{03}-2\rho h\frac{\partial^2u_2}{\partial t^2}=0,\tag{4.2}$$

$$\frac{T_1}{R_1}+\frac{T_2}{R_2}-\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\frac{1}{A_1}\left|\frac{\partial A_2M_1}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial A_1H}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}H-\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}M_2\right|+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\frac{1}{A_2}\left|\frac{\partial A_2H}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial A_1M_2}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}H-\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}M_1\right|\right]+$$
$$+\frac{1}{c}\bar{j}_1\cdot B_{02}-\frac{1}{c}\bar{j}_2\cdot B_{01}+2\rho h\frac{\partial^2w}{\partial t^2}=0.\tag{4.3}$$

Варьирование действия (4.1) по A_i^0, $A_k^{(e)}$ при постоянных u_i и w

с учетом (1.1) дает уравнения электромагнитного поля в суммарном виде, т. е. как для внутренней области оболочки (которая в рамках асимптотической точности $O(\lambda^{-l+p})$ проявляется как математический разрез ([10–12])), так и во внешней от него среде:

$$\operatorname{rot} h_{(e)} = \delta(\alpha_3) \cdot \Theta(\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega)\bar{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial E_{(e)}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} E_{(e)} = 0, \tag{4.4}$$

где $\bar{j} = (\bar{j}_1, \bar{j}_2, 0)$, $\delta(\alpha)$—дельта-функция Дирака, $\Theta(\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega)$—функция Хевисайда.

С учетом (1.1) к уравнениям (4.4) следует присоединить уравнения типа (1.6) с индексом (e).

Уравнение (4.4) с помощью функции Грина легко приводится к следующей системе интегральных уравнений:

$$\left(\bar{j}(\alpha_1, \alpha_2, t) - 2h\sigma \cdot \frac{B_{01}}{c}\frac{\partial w(\alpha_1, \alpha_2, t)}{\partial t} + 2h\sigma\frac{B_{03}}{c}\frac{\partial u_1(\alpha_1, \alpha_2, t)}{\partial t}\right)e_1 +$$

$$+\left(\bar{j}_2(\alpha_1, \alpha_2, t) - 2h\sigma \cdot \frac{B_{03}}{c}\frac{\partial u_2(\alpha_1, \alpha_2, t)}{\partial t} + 2h\sigma\frac{B_{02}}{c}\frac{\partial w(\alpha_1, \alpha_2, t)}{\partial t}\right)e_2 =$$

$$= -\frac{2\sigma h}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \frac{\bar{j}_1(\alpha_1', \alpha_2', t)e_1' + \bar{j}_2(\alpha_1', \alpha_2', t)e_2'}{R_{Qp}}\,d\Omega, \tag{4.5}$$

где R_{pQ}—расстояние между двумя точками (α_1, α_2) и (α_1', α_2') на поверхности оболочки; (e_1, e_2) и (e_1', e_2') базисные векторы для срединной поверхности оболочки в указанных точках.

Уравнения (4.1)—(4.3), (4,5) представляют разрешающую систему двумерной теории магнитоупругости тонких оболочек, которая с асимптотической точностью $O(\lambda^{-l+p})$ (т. е. в рамках точности классической теории тонких оболочек, когда относительно единицы пренебрегаются величины порядка h/R_i) совпадает с аналогичной системой, приводимой в работах ([10–12]), где были сохранены члены до порядка $O(\lambda^{-2l+2p})$ (т. е. с некоторыми уточненными членами по сравнению с классической теорией оболочек).

При варьировании действия (3.1) наряду с разрешающей системой уравнений двумерной теории магнитоупругости (4.1)—(4.3), (4.5), при помощи соответствующих контурных интегралов получаются граничные условия на контуре Γ, ограничивающем срединную поверхность оболочки Ω. Эти условия, во-первых, представляют канонические граничные условия теории тонких оболочек ([16]) и, во-вторых, получаются контурные интегралы вдоль Γ определяющими поверхностными токами

$$\oint_\Gamma \bar{j}_\vartheta A_{03}\delta w\,dg, \qquad \oint_\Gamma (\bar{j}_\vartheta \delta u_t - \bar{j}_t \delta u_\vartheta)A_{0t}\,dg, \tag{4.6}$$

где ϑ и t—нормальное и касательное направления для контура Γ. Из (4.6) будут вытекать следующие граничные условия на Γ для поверхностного тока:

$$\bar{j}_{э} = 0, \quad \bar{j}_{t} = 0, \text{ или } \bar{j}_1/_{\Gamma} = \bar{j}_2/_{\Gamma} = 0. \tag{4.7}$$

Ленинаканский филиал
Ереванского политехнического института им. К. Маркса

Ս. Հ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Հաղորդիչ բարակ թաղանթի մագնիսաառաձգականության վարիացիոն հավասարումը

Բերվում է մագնիսաառաձգականության եռաչափ տեսության վարիացիոն հավասարումը, որը կարող է հիմք ծառայել արտածելու միմյանց հետ փոխազդեցության մեջ գտնվող առաձգական մարմնի և էլեկտրամագնիսական դաշտի բոլոր հավասարումները և եզրային պայմանները։

Ասիմպտոտիկ մեթոդի օգնությամբ մագնիսաառաձգականության եռաչափ տեսության վարիացիոն հավասարման հիման վրա կառուցվում է բարակ թաղանթի մագնիսաառաձգականության երկչափ տեսության վարիացիոն հավասարումը, որից ելնելով արտածվում են մագնիսաառաձգականության երկչափ տեսության որոշիչ հավասարումները և եզրային պայմանները։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *К. Б. Власов, Б. Х. Ишмухаметов,* Журн. экспер. и теорет. физики, т. 46, вып. 1, с. 201—212 (1964). [2] *Л. Т. Черный,* в кн.: Науч. тр. Ин-та механики МГУ, № 31, с. 100—119 (1974). [3] *В. А. Желнорович,* Модели материальных сплошных сред, обладающих внутренним электромагнитным и механическим моментами, Изд-во Моск. ун-та, 1980. [4] *Л. И. Седов, А. Г. Цыпкин,* Прикл. математика и механика, т. 43, вып. 3, с. 387—400 (1974). [5] *В. В. Лохин,* в кн.: Науч. тр. Ин-та механики Моск. ун-та, № 31, с. 149—166 (1974). [6] *А. А. Штейн,* Прикл. математика и механика, т. 41, вып. 2, с. 271—281. (1977). [7] *Л. И. Седов,* Усп. мат. наук, т. 20, вып. 5 (125), с. 121—180 (1965). [8] *В. Л. Бердичевский,* в кн.: Проблемы механики твердого деформированного тела. Судостроение, Л., с. 55—66, 1970. [9] *С. А. Амбарцумян, Г. Е. Багдасирян, М. В. Белубекян,* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин, Наука, М., 1977. [10] *С. О. Саркисян,* Магнитоупругость проводящих тонких оболочек и пластин. Докт. дис. Казанский гос. ун-т, 1986. [11] *С. О. Саркисян,* Изв. АН АрмССР Механика, т. 38, № 6, с. 21—24 (1985). [12] *С. О. Саркисян,* Изв. АН АрмССР, Механика, т. 42, № 5, (1989). [13] *С. О. Саркисян,* Уч. зап. Ереванского ун-та, Ест. науки, № 2, с. 41—46, 1985. [14] *С. О. Саркисян,* Механика. Межвуз. сб. научн. тр. Ереванского ун-та, вып. 6, с. 102—111, 1987. [15] *В. В. Никольский,* Электродинамика и распространение радиоволн., Наука, М., 1978. [16] *В. В. Новожилов,* Теория тонких оболочек, Судпромгиз, Л., 1951. [17] *А. Л. Гольденвейзер,* Теория упругих тонких оболочек. Наука, М., 1976.