ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Том 89 1989 №4

УДК 515.1

МАТЕМАТИКА

Э. А. Мирзаханян

О бесконечномерных аналогах теорем Борсука о нечетности степени нечетного отображения и о неподвижной точке

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракеляном 8/VI 1989)

В статье приводятся бесконечномерные аналоги (теоремы 1,7) классических теорем Борсука о нечетности топологической степени нечетного непрерывного отображения ([1]) и о неподвижной точке ([2]).

Упомянутые теоремы (первая известна под названием теоремы Борсука о антиподальном отображении конечномерных сфер) перестают быть справедливыми в бесконечномерном случае, когда рассматривают класс всех непрерывных отображений.

Вместе с тем оказывается, что справедливы бесконечномерные аналоги этих теорем в вещественном гильбертовом пространстве H, если, однако, рассматривать лишь отображения, принадлежащие одному допустимому классу K_0 непрерывных отображений.

Определение и ряд основных свойств класса K_0 содержатся в ([3]). Приведем (эквивалентное) определение класса K_0.

Пусть G—открытое подмножество пространства H и $f: G\to H$—непрерывное отображение.

Будем говорить, что отображение f в точке $x_0\in G$ принадлежит классу K_0, если выполнены следующие условия:

1. f в точке x_0 локально удовлетворяет условию Липшица, т. е. существуют такие числа $r>0$ и $c>0$, что при $x, y\in G$, $\|x-x_0\|<r$, $\|y-x_0\|<r$ выполнено соотношение

$$\|f(x)-f(y)\|\leqslant c\|x-y\|.$$

2. Для любого числа $\varepsilon>0$ существуют окрестность $U\subset G$ точки x_0 в H, конечномерное подпространство $L\subset H$ и действительное число λ такие, что если $x, y\in u$ и вектор $x-y$ ортогонален подпространству L, то выполнено соотношение

$$\|f(x)-f(y)-\lambda(x-y)\|\leqslant\varepsilon\|x-y\|.$$

Будем говорить, что отображение $f: G\to H$ принадлежит классу K_0 на G, если f в каждой точке $x_0\in G$ принадлежит классу K_0.

Фигурирующее в приведенном определении действительное число λ можно выбрать так, чтобы оно определялось только точкой x_0 и было пригодно для любого числа $\varepsilon>0$.

Получающаяся таким образом действительная функция $\lambda(x)=\lambda_f(x)$, заданная на G, непрерывна и единственна; она называется терминальной производной отображения f.

Пусть теперь M—произвольное подмножество пространства H и $f: M \to H$—непрерывное отображение. Будем говорить, что отображение f принадлежит классу K_0, если существуют открытое в H подмножество $G \supset M$ и непрерывное отображение $g: G \to H$ такие, что $g \in K_0$ и $g(x)=f(x)$ для каждой точки $x \in M$.

В ([4]) построена топологическая степень отображений $f: G \to H$, принадлежащих некоторому подклассу класса K_0.

В дальнейшем отображения, принадлежащие классу K_0, мы будем называть K_0-отображениями.

Теорема 1. *Пусть G—открытое подмножество гильбертова пространства H, содержащее нулевую точку 0 и симметричное относительно 0. Пусть, далее, $f: G \to H$—нечетное K_0-отображение, удовлетворяющее условию:*

с) *прообраз $X=f^{-1}(0)$ точки 0 компактен и на нем терминальная производная $i_f(x)$ отображения f отлична от нуля.*

Тогда определена степень $\deg(f, G, 0)$ отображения f в точке 0 и она нечетна.

Приведем ряд приложений теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть G—открытое подмножество пространства H, симметричное относительно нулевой точки 0 и такое, что $0 \notin \overline{G}$. Пусть, далее, $f: G \to H$—нечетное K_0-отображение, обладающее тем свойством, что прообраз $X=f^{-1}(0)$ непуст, компактен и терминальная производная $i_f(x)$ отображения f на всем X отлична от нуля.*

Тогда степень $\deg(f, G, 0)$ отображения f в точке 0 четна.

Теорема 3. *Пусть G—открытое подмножество пространства H, симметричное относительно нулевой точки 0, такое, что $0 \notin G$. Пусть, далее, $f: G \to H$—K_0-отображение, являющееся нечетным $(f(-x)=-f(x))$.*

Тогда, если прообраз $X=f^{-1}(0)$ компактен и терминальная производния $i_f(x)$ отображения f на X отлична от нуля, то для любого подпространства $H^{(1)}$ дефекта 1 пространства H имеет место соотношение

$$f(G) \cap (H \setminus H^{(1)}) \neq \varnothing .$$

Теорема 4. *Не существует нечетного* (антиподального) *K_0-отображения $f: S \to S^{(2)}$ единичной сферы S пространства H в сферу $S^{(2)}$ дефекта (коразмерности) 2 того же пространства H.*

Предложение 1. Пусть $f: S \to H^{(1)}$—нечетное K_0-отображение единичной сферы S пространства H в его подпространство $H^{(1)}$ дефекта 1.

Тогда существует точка $x^* \in S$ такая, что $f(x^*)=0$.

Предложение 2. При любом k_0-отображении $f: S \to H^{(1)}$ сферы S подпространства $H^{(1)}$ дефекта 1 существует по крайней мере одна точка $x_0 \in S$ такая, что $f(x_0)=f(-x_0)$.

Следствие 1. Не существует K_0-вложения единичной сферы S пространства H в его подпространство $H_{(1)}$ дефекта 1.

Замечание. Отметим, что теорема 4 и предложения 1, 2 представляют собой эквивалентные формы обычной формулировки конечмерной теоремы Борсука о антиподальном отображении конечномерных сфер.

Теорема 5. *Пусть G—открытое подмножество пространства H, симметричное относительно точки 0 и такое, что $0\in H$. Пусть, далее, $f: G \to H$—K_0-отображение, удовлетворяющее следующим условиям:*

1) $f(0)=0$;

2) *для любой точки* $x\in(G\setminus\{0\})$ $f(x)\neq 0$, *причем векторы* $f(x)$ *и* $f(-x)$ *направлены неодинаково, т. е.* $\dfrac{f(x)}{\|f(x)\|}\neq\dfrac{f(-x)}{\|f(-x)\|}$

3) *терминальная производная* $\lambda_f(x)$ *отображения* f *в точке* 0 *отлична от нуля.*

Тогда степень $\deg(f, G, 0)$ *определена и нечетна.*

Теорема 6. *Пусть $S^{(r)}$—единичная сфера конечной коразмерности $r\geqslant 1$ пространства H, т. е. единичная сфера подпространства $H^{(r-1)}$ коразмерности $r-1$ относительно H, и пусть $f: S^{(r)}\to S^{(r)}$ есть K_0-отображение, сохраняющее антиподы (т. е. $f(-x)=-f(x)$ для каждой $x\in S^{(r)}$).*

Тогда f не может быть K_0-гомотопным постоянному отображению.

Следствие 2. Сфера $S^{(r)}$ K_0 нестягиваема по себе в точку. Достаточно применить теорему 6 к отображению $f=idS^{(r)}$.

Замечание. Другое доказательство следствия 2 было получено автором раньше при помощи бесконечномерных гомотопических групп.

Теорема 7. *Пусть B—единичный замкнутый шар в H и $f: B\to H$—K_0-отображение такое, что $f(-x)=-f(x)$ для всякой точки x единичной сферы S в H.*

Тогда f имеет хотя бы одну неподвижную точку.

Ереванский государственный
университет

Է. Ա. ՄԻՐԶԱԽԱՆՅԱՆ

Բորսուկի կենտ արտապատկերման աստիճանի կենտության մասին և անշարժ կետի մասին թեորեմների անվերջ չափանի անալոգների մասին

Բորսուկի կենտ արտապատկերման աստիճանի կենտության մասին և անշարժ կետի մասին դասական թեորեմները դադարում են ճիշտ լինելուց անվերջ չափանի ֆունկցիոնալ տարածություններում բոլոր անընդհատ արտապատկերումների դեպքում։

Հոդվածում բերված են այդ թեորեմների անվերջ չափանի անալոգների

ապացույցները (թեորեմներ 1 և 9) իրական սեպարաբել տարածությունում, երբ դիտարկվում են մի թույլատրելի դասին պատկանող արտապատկերումներ։

Բերված են նաև թեորեմ 1 մի շարք կարևոր կիրառություններ։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. Ниренберг*, Лекции по нелинейному функциональному анализу, Мир, М., 1977. [2] *J. Dugundji, A. Granas*, Fixed point theory, Warszawa, PWN, 1982. [3] *В. Г. Болтянский*, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 9, №2 (1974). [4] *В. Г. Болтянский, Э. Л. Мирзаханян*, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 9, №5 (1974).