ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Том 89 1989 №4

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

А. Л. Григорян

Асимптотическая оценка остатка при приближении функций тригонометрическими полиномами наилучшего квадратического приближения

(Представлено чл-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 8/VI 1989)

Пусть $m, q\in N$, $q>2m$, $x_l=\frac{2\pi l}{q}$ $l=0, 1 \dots q-1$, и пусть $f(x)$ 2π — периодическая функция, определенная на множестве $\{x_l\}_{l=0}^{q-1}$. Известно, что среди всех тригонометрических полиномов $T_m(x)$ порядка не выше m наименьшее значение сумме

$$\sum_{l=0}^{q-1}[f(x_l)-T_m(x_l)]^2$$

доставляет полином

$$T_m^q(x, f)=\frac{2}{q}\sum_{l=0}^{q-1}f(x_l)\cdot D_m(x_l-x),$$

где $D_m(u)$ — ядро Дирихле. Этот полином называют полиномом наилучшего квадратического приближения для функции $f(x)$ на системе точек $\{x_l\}_{l=0}^{q-1}$.

Аппроксимацией функций полиномами наилучшего квадратического приближения занимались С. Н. Бернштейн ([1]), М. Д. Калашников ([2]), Г. П. Губанов ([3]) и др.

Совокупность всех функций, определенных на действительной оси с периодом 2π и удовлетворяющих условию Липшица степени 1 с константой единица, назовем классом H.

Обозначим $\quad C_m^q(x, H)=\sup\limits_{f\in H}|f(x)-T_m^q(x, f)|$.

Нетрудно проверить, что величина $C_m^q(x, H)$ имеет по x период $2\pi/q$ и поэтому в дальнейшем можно считать, что $0<x\leqslant 2\pi/q$.

Пусть

$$\mu(x)=\begin{cases}\left\|\frac{1}{2}+\frac{xq}{2\pi}\right\|, & \text{при} \quad 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{q}\\ -\left\|\frac{1}{2}+\frac{xq}{2\pi}\right\|, & \text{при} \quad \frac{\pi}{q}<x\leqslant\frac{2\pi}{q},\end{cases}$$

где $\|\cdot\|$ — расстояние до ближайшего целого.

Верны следующие теоремы.

Теорема 1. *Для всех $m, q \in \mathbb{N}$, $q > 2m$ справедливы оценки*

$$C_m^q(x, H) \leq |\sqrt{2}\ln\tau(m) + d(m)| / \left(q\sin\frac{\pi m}{q}\right) + O\left(\frac{1}{m}\right).$$

$$C_m^q(x, H) \geq |\ln\tau(m) + d(m)| / \left(q\sin\frac{\pi m}{q}\right) + O\left(\frac{1}{m}\right),$$

где
$$\tau(m) = \min(2m+1, q-2m-1) + 1,$$

$$d(m) = \begin{cases} 0, \quad \text{при} \quad 2m+1 \leq \dfrac{q}{2} \\ 2\sin\pi\left(\dfrac{1}{2} + \mu(x)\right)\ln\dfrac{q}{\tau(m)}, \quad \text{при} \quad 2m+1 > \dfrac{q}{2} \end{cases}$$

В частности, при $q = 2m+1$, $x = \pi/q$

$$C_m^q(x, H) = d(m)/(q\sin\pi m/q) + O\left(\frac{1}{m}\right),$$

а при $q = 4m+2$, $x = 0$, —

$$C_m^q(x, H) = \frac{\sqrt{2}\ln\tau(m)}{q \cdot \sin\pi m/q} + O\left(\frac{1}{m}\right).$$

Теорема 2. *Пусть $m, q \in \mathbb{N}$, $q > 2m$, $\dfrac{2m+1}{q} \to \alpha \in [0, 1]$, $\dfrac{xq}{2\pi} \to \beta$ при $m \to \infty$,*

$$Y_m = C_m^q(x, H) / \left(\frac{\pi\alpha/2}{\sin\pi\alpha/2} \cdot m^{-1} \cdot \ln m\right).$$

Тогда: а) *если α—иррациональное или $\alpha = 0$, то*

$$\lim_{m\to\infty} Y_m = 4/\pi^2;$$

б) *если $\alpha = s/p$,* где *$s, p \in \mathbb{N}$, $(s, p) = 1$, то при*

$$D_{\mu(x)}(s, p) = \frac{2}{\pi p} \cdot \frac{\cos\left(\frac{1}{2} - \left\{s \cdot \mu(x) - \frac{p}{2}\right\}\right) \cdot \pi/p}{\sin\pi/2p} - \frac{4}{\pi_2} \geq 0$$

имеем

$$\underline{\lim_{m\to\infty}}\, Y_m \geq \frac{4}{\pi^2},$$

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\, Y_m \leq \frac{4}{\pi^2} + D_r(s, p) = A_r(s, p),$$

а при $D_{\mu(x)} < 0$ *имеем*

$$\underline{\lim_{m\to\infty}}\, Y_m \geq A_r(s, p),$$

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\, Y_m \leq \frac{4}{\pi^2},$$

где
$$r = \lim_{q\to\infty} \mu(x).$$

Кроме того, для любого

$$h \in \left[\frac{4}{\pi^2},\ A_r(s, p)\right], \quad \left(h \in \left[A_r(s, p),\ \frac{4}{\pi^2}\right]\right)$$

существуют $m_n, q_n \in \mathrm{N}$ *такие, что* $\dfrac{2m_n+1}{q_n} \to \dfrac{s}{p}$ *и* $\lim Y_{m_n} = h$.

Отметим, что остаточный член $\varepsilon_m = O\left(\frac{1}{m}\right)$ в теореме 1 понимается в том смысле, что существует константа K, не зависящая от m, q, x, для которой $|\varepsilon_m| \leqslant \frac{K}{m}$.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Ա. Լ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Ֆունկցիայի լավագույն քառակուսային մոտարկման մնացորդի ասիմպտոտիկ գնահատումը

Նշանակենք H 2π-պարբերական f ֆունկցիաների դասը, որոնք բավարարում են Լիպշիցի պայմանին $\alpha=1$ աստիճանով և 1 հաստատունով։

Դիտենք

$$C_m^q(x, H) = \sup_{f \in H} |f(x) - T_m^q(x, f)| -$$

որտեղ $T_m^q(x, f)$ $f(x)$ ֆունկցիայի լավագույն քառակուսային մոտարկման եռանկյունաչափական բազմանդամն է։

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է $C_m^q(x, H)$ ***մեծության կարգը և*** ***ասիմպտոտիկան***, *երբ $m, q \to \infty$.*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. Н. Бернштейн*, ДАН СССР, т. 4, № 1 (1934). [2] *М. Д. Калашников*, ДАН СССР, т. 105, № 4 (1955). [3] *Г. П. Губанов*, Изв. высш. уч. заведений. Математика, № 12, 1970.