ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Том 89 1989 №4

УДК 517.537

МАТЕМАТИКА

А. А. Даниелян

О множестве расходимости полиномов, равномерно ограниченных на компакте

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракеляном 25/V 1989)

Известно, что любая последовательность непрерывных функций расходится на множестве типа $G_{\delta\sigma}$. Обратное, всякое такое множество совпадает со множеством расходимости некоторой последовательности непрерывных функций, которая, кроме того, равномерно ограничена и сходится к нулю на своем множестве точек сходимости (теорема Хана и Серпинского, ([1]), с. 261—262).

Пусть E—компактное множество со связным дополнением на комплексной плоскости, ∂E—граница E и $H\subset\partial E$. В настоящей заметке доказывается

Теорема. *Для того, чтобы существовала равномерно ограниченная на ∂E последовательность полиномов, расходящаяся на H и сходящаяся к нулю на $\partial E\setminus H$, необходимо и достаточно, чтобы H было множеством типа $G_{\delta\sigma}$.*

Необходимость условия теоремы была отмечена выше.

Достаточность. Так как H—множество типа $G_{\delta\sigma}$, то существует равномерно ограниченная последовательность непрерывных на ∂E функций $\{f_n(z)\}$, расходящаяся на H и сходящаяся к нулю на $\partial E\setminus H$. Можем считать, что $|f_n(z)|\leqslant 1$, $n=1, 2, \ldots$. Проведем пока рассуждения для фиксированного n.

Пусть $\delta_n>0$ такое, что при $z\in\partial E$, $z'\in\partial E$, $|z-z'|<\delta_n$ справедливо

$$|f_n(z)-f_n(z')|<\frac{1}{n}. \tag{1}$$

Обозначим $\varepsilon_n=\min\left(\frac{1}{n}, \delta_n\right)$

Пусть A—класс функций, аналитических во внутренних точках E и непрерывных на E. Так как A—алгебра Дирихле на ∂E, то для любой точки $t\in\partial E$ существует функция $h_t(z)\in A$ такая, что $h_t(t)=1$ и $|h_t(z)|<1$, $z\in E\setminus\{t\}$ (см. например ([2]), с. 37, следствие 2). Пусть натуральное N_t такое, что когда $z\in E$ лежит вне ε_n-окрестности точки t, то для функции $g_t(z)=h_t^{N_t}(z)$ справедливо неравенство

$$|g_t(z)|<\frac{1}{n}, \quad t\in\partial E. \tag{2}$$

Очевидно, что можем найти конечное покрытие для ∂E, состоящее из замкнутых кругов $\Delta_1^{(n)}, \Delta_2^{(n)}, \ldots, \Delta_{k_n}^{(n)}$ с центрами, соответственно, в точках $t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \ldots, t_{k_n}^{(n)}$ множества ∂E и с радиусами меньше, чем δ_n, таких, что

$$|g_{t_m^{(n)}}(z)-1|<\frac{1}{n}, \quad z\in\Delta_m^{(n)}\cap E, \quad m=1, 2, \ldots, k_n.$$

Обозначим $U_m^{(n)}(z)=f_n(t_m^{(n)})g_{t_m^{(n)}}(z)$, $m=1, 2, \ldots, k_n$ и пока фиксируем m.

При $z\in\Delta_m^{(n)}\cap\partial E$ имеем

$$|U_m^{(n)}(z)-f_n(z)|\leqslant|f_n(t_m^{(n)})|\cdot|g_{t_m^{(n)}}(z)-1|+|f(t_m^{(n)})-f_n(z)|<\frac{2}{n} \tag{3}$$

Если $z\in E$ и z лежит вне ε_n-окрестности множества $\Delta_m^{(n)}\cap\partial E$, то очевидно, что z лежит вне ε_n-окрестности точки $t_m^{(n)}$ и согласно (2) имеем

$$|U_m^{(n)}(z)|=|f_n(t_m^{(n)})|\cdot|g_{t_m^{(n)}}(z)|<\frac{1}{n}. \tag{4}$$

На множестве ∂E справедливо неравенство

$$|U_m^{(n)}(z)|<|f_n(z)|+\frac{2}{n}. \tag{5}$$

Действительно, когда $z\in\partial E$ лежит вне ε_n-окрестности множества $\Delta_m^{(n)}\cap\partial E$, то (5) следует из (4). Если $z\in\partial E$ лежит в ε_n-окрестности множества $\Delta_m^{(n)}\cap\partial E$, то существует $z'\in\Delta_m^{(n)}\cap\partial E$ такое, что $|z-z'|<\varepsilon_n$ Тогда из определения $U_m^{(n)}(z)$ и из неравенства (1) получается

$$|U_m^{(n)}(z)|\leqslant|f_n(t_m^{(n)})|<|f_n(z')|+\frac{1}{n}<|f_n(z)|+\frac{2}{n};$$

т. е. неравенство (5) установлено.

Для функций $U_m^{(n)}(z)$, $m=1, 2, \ldots, k_n$; $n=1, 2, \ldots$, введем нумерацию, $V_1(z)=U_1^{(1)}(z)$, $V_2(z)=U_2^{(1)}(z), \ldots, V_{k_1}(z)=U_{k_1}^{(1)}(z)$, $V_{k_1+1}(z)=U_1^{(2)}(z)$, $V_{k_1+2}(z)=U_2^{(2)}(z), \ldots$

Как следует из (5), последовательность $\{V_n(z)\}$ равномерно ограничена на ∂E и сходится к нулю на $\partial E\setminus H$.

Убедимся, что $\{V_n(z)\}$ расходится на H. Возьмем любую точку $z_0\in H$. Среди кругов $\Delta_m^{(n)}$, $m=1, 2, \ldots, k_n$, существует некоторый круг $\Delta_{m_n}^{(n)}$, который содержит точку z_0 $(n=1, 2, \ldots)$. Рассмотрим последовательность $\{U_{m_n}(z_0)\}$. Так как $\{f_n(z_0)\}$ расходится, то согласно (3) расходится также $\{U_{m_n}(z_0)\}$. Таким образом $\{V_n(z_0)\}$ имеет расходящуюся подпоследовательность $\{U_{m_n}^{(n)}(z_0)\}$ и, следовательно, сама расходится.

Равномерно приближая по теореме С. Н. Мергеляна функцию $V_n(z)$ на E полиномом $P_n(z)$ с точностью $1/n$, получим последовательность $\{P_n(z)\}$, которая имеет сформулированные в теореме свойства. Теорема доказана.

Замечание. Легко видеть, что последовательность $\{P_n(z)\}$ сходится к нулю также на множестве $E \setminus \partial E$. Действительно, пусть $z \in E \setminus \partial E$. Так как $\varepsilon_n \to 0$, то для всех достаточно больших n в точке z справедлива оценка (4), откуда следует наше утверждение.

Кироваканский государственный
педагогический институт

Ա. Ա. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ

Կոմպակտի վրա հավասարաչափ սահմանափակ բազմանդամների տարամիտության բազմության մասին

Ենթադրենք E բազմությունը կապակցված լրացումով կոմպակտ է կոմպլեքս հարթության վրա: Աշխատանքում ապացուցված է, որ որպեսզի $H \subseteq \partial E$ բազմությունը հանդիսանա տարամիտության բազմություն ∂E-ի վրա հավասարաչափ սահմանափակ բազմանդամների ինչ-որ հաջորդականության համար, անհրաժեշտ է և բավարար, որ H-ը լինի G_δ տիպի բազմություն:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ф. Хаусдорф*, Теория множеств, М.—Л., ОНТИ, 1937. [2] *Дж. Вермер*, в кн.: Некоторые вопросы теории приближений, М., ИЛ. с. 9—73, 1963.