

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

Ф. А. Шамоян, А. В. Гаспарян

Полнота систем простых дробей с фиксированными полюсами в пространствах голоморфных функций, гладких вплоть до границы

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашьяном 18/VI 1989)

1°. Пусть D — единичный круг на комплексной плоскости, $H(D)$ — множество всех голоморфных в D функций, $H^p(D) = (0 < p < +\infty)$ — известные пространства Харди. С произвольной последовательностью $\{a_k\}_1^\infty$, $a_k \in D$, $k = 1, 2, \dots$, свяжем систему рациональных функций:

$$r_k(z) = \frac{(s_k - 1)! z^{s_k - 1}}{(1 - \bar{a}_k z)^{s_k}}, \quad (1)$$

где $s_k \geq 1$ — кратность появления числа a_k в совокупности $\{a_j\}_{j=1}^k$. Хорошо известно, что (см. (1,2)) для полноты системы $\{r_k\}_{k=1}^\infty$ в пространствах H^p необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^\infty (1 - |a_k|) = +\infty \quad (2)$$

В том же случае, когда нет полноты, подробное описание замыканий этой системы приведено в работах М. М. Джрбашьяна (3) и Г. Ц. Тумаркина (4).

Отметим, однако, что вопрос о полноте указанной системы в более узких пространствах голоморфных функций, по нашим сведениям, раньше не рассматривался. Цель этой заметки — указать, что в отличие от пространств H^p такое простое описание в общем случае невозможно.

Для полноты в этом случае важно не только поведение модулей $\{a_k\}_1^\infty$, но и их расположение по аргументам.

В конце заметки мы рассмотрим полноту системы Мюнца в весовых $L^2(0, +\infty)$ пространствах.

Для изложения основных результатов заметки приведем:

Определение 1. Пусть E — замкнутое множество на $\Gamma = \partial D$. Скажем, что E — множество Карлесона, если $m(E) = 0$ и $\sum_{k=1}^\infty l_k \cdot \lg \frac{1}{l_k} < \infty$, где $\{l_k\}$ — последовательность длин дополнительных интервалов множества E , m — линейная мера Лебега на Γ .

Углом Штольца будем называть угол с вершиной на Γ , раствором меньше π , биссектриса которого проходит через центр круга.

Пересечение угла Штольца с D обозначим через $S_i(\alpha)$, где i — вершина угла, а α — его раствор.

Определение 2. Пусть $E \subseteq D$. Скажем, что E удовлетворяет условию $K(\alpha)$, если $E \subseteq \bigcup_{i \in I} S_i(\alpha)$, где I — множество Карлесона на Γ .

Теперь введем в рассмотрение следующие пространства голоморфных в D функций.

Пусть ω — функция типа модуля непрерывности, n — неотрицательное целое число. Положим: $\lambda_{\omega}^{(n)} = \{f \in H(D) : |f^{(n)}(\zeta_1) - f^{(n)}(\zeta_2)| = o(\omega(|\zeta_1 - \zeta_2|)),$

$$\text{при } |\zeta_1 - \zeta_2| \rightarrow 0, \zeta_1, \zeta_2 \in D, \|f\|_{\lambda_{\omega}^{(n)}} = \|f\|_{\infty} + \sup \left\{ \frac{|f^{(n)}(\zeta_1) - f^{(n)}(\zeta_2)|}{\omega(|\zeta_1 - \zeta_2|)} \right\},$$

$$A_n^p = \left\{ f \in H(D) : \|f\|_{A_n^p} = \sum_{k=0}^n \left(\int_D |f^{(k)}(z)|^p dm_2(z) \right)^{1/p} \right\},$$

где $m_2(z)$ — мера Лебега на плоскости.

И, наконец, через $C_A^{(n)}$ обозначим пространство голоморфных в D функций, n -ая производная которых принадлежит классу $C(\bar{D})$. В $C_A^{(n)}$ вводится естественная норма.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что ω удовлетворяет известному условию А. Зигмунда

$$\int_0^{\delta} \frac{\omega(t)}{t} dt = O(\omega(\delta)), \quad (\delta \rightarrow 0).$$

В следующих трех теоремах будем предполагать, что X совпадает с одним из следующих пространств: $\lambda_{\omega}^{(n)}$, $A_n^p (1 \leq p < +\infty)$, $C_A^{(n)}$.

Теорема 1. Пусть $\{z_k\}_1^{\infty}$ — произвольная последовательность, удовлетворяющая $K(\alpha)$ условию ($0 < \alpha < 1$). Тогда следующие условия равносильны:

1) система $\{r_k(z)\}_1^{\infty}$ полна в пространстве X ;

$$2) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) = +\infty. \quad (3)$$

В следующей теореме устанавливается, что для справедливости утверждений теоремы 1 условие $K(\alpha)$ существенно.

Теорема 2. Существует последовательность $\{z_k\}_1^{\infty}$ из D , для которой выполняется (3), но в то же время система $\{r_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ неполна в пространстве X .

Следующий результат показывает, что в случае пространства X возможны и другие явления.

Теорема 3. Пусть, как и прежде, X совпадает с одним из вышеуказанных пространств, при этом $n \geq 1$. Тогда существуют две системы рациональных функций типа (1) $\{r_k(z)\}_1^{\infty}$ и $\{l_k(z)\}_1^{\infty}$

такие, что каждая из них неполна в пространстве X и в то же время их объединение является полным в нем.

Отметим также, что условие полноты существенно зависит от порядка гладкости функций, принадлежащих пространству X .

Теорема 4. Пусть $1 \leq p < q$, $n \geq 1$.

1°. Тогда существует последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ такая, что система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ полна в пространстве A_n^p , но не полна в пространстве A_n^q .

2°. Пусть $m \geq n+1$. Тогда существует последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ такая, что система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ полна в пространствах A_n^p , $C_{A,n}^{(n)}$, но не полна в пространствах A_m^p , $C_A^{(m)}$.

В теореме 5 указывается зазор между пространствами $\lambda_{\omega_1}^{(n)}$ и $\lambda_{\omega_2}^{(n)}$, при котором полнота имеет место в одном из них, но ее нет в другом.

Теорема 5. Пусть ω_1 и ω_2 — функции типа модуля непрерывности, такие, что

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\omega_1\left(\frac{1}{k}\right)}{(\ln k \ln \ln k) \omega_2\left(\frac{1}{k}\right)} < +\infty.$$

Тогда существует последовательность $\{z_k\}_1^\infty$, $z_k \in D$, $k=1, 2, \dots$, для которой система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ полна в пространстве $\lambda_{\omega_2}^{(n)}$, но не полна в пространстве $\lambda_{\omega_1}^{(n)}$.

Нетрудно установить аналоги теорем 1—5 для случая пространств, голоморфных в полуплоскости функций.

В связи с теоремой Мюнца в весовых $L^2(0, +\infty)$ пространствах мы приведем один из этих результатов. С этой целью введем сначала обозначения: Π^+ — верхняя полуплоскость.

Через $A_n^p(\Pi^+)$ и $H_n^p(\Pi^+)$ ($n \geq 0$) обозначим пространства голоморфных в верхней полуплоскости функций f , для которых $\|f\|_{A_n^p(\Pi^+)} =$

$$= \sum_{k=0}^n \left(\int_{\Pi^+} |f^{(k)}(x+iy)|^p dx dy \right)^{1/p} < +\infty \text{ и соответственно } \|f\|_{H_n^p(\Pi^+)} =$$

$$= \sum_{k=0}^n \left(\sup_{y>0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f^{(k)}(x+iy)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty. \text{ Как и прежде, с каждой после-}$$

довательностью $\{\lambda_k\}$ из нижней полуплоскости свяжем систему рациональных дробей

$$r_k(z) = \frac{(s_k-1)!}{(\lambda_k-z)^{s_k}} \text{ и систему } \{e^{-\lambda_k z} z^{s_k-1}\}_1^\infty, \text{ где } s_k \geq 1 \text{ — кратность по-}$$

явления λ_k среди множества $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$. Определения, связанные с множеством $K(x)$, очевидным образом переносятся на случай полуплоскости.

Ниже будем предполагать, что X совпадает с одним из пространств $H_n^p(\Pi^+)$, $A_n^p(\Pi^+)$.

Теорема 6. Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — последовательность из нижней полуплоскости. Тогда

1) Если $\{\lambda_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию $K(z)$, то следующие условия равносильны:

а) система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ полна в пространстве X ;

$$\text{б) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{Im} \lambda_k|}{1 + |\lambda_k|^2} = +\infty. \quad (4)$$

2) Существует последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$ из нижней полуплоскости, не удовлетворяющая $K(z)$ условию, для которой выполняется (4). В то же время система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ не полна в X .

Используя теорему Винера—Пэли (см. (2)), из теоремы 6 легко вывести теорему типа теоремы Мюнца в пространстве функций f , измеримых на $(0, +\infty)$, для которых

$$\|f\|_{L^2(P)} = \left\{ \int_0^{+\infty} P(t) |f(t)|^2 dt \right\}^{1/2}, \text{ где } P(t) = \sum_{j=0}^n a_j t^j, (a_j \geq 0). \quad (5)$$

Теорема 7. Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — последовательность из нижней полуплоскости. Тогда

1) Если $\{\lambda_k\}_1^\infty$ удовлетворяет $K(z)$ условию, то следующие утверждения равносильны:

а) Система $\{e^{-\lambda_k x} x^k\}_1^\infty$ полна в $L^2(P)$;

б) Последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию (4).

2) Существует последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$ из нижней полуплоскости, для которой ряд (4) расходится, но в то же время $\{e^{-\lambda_k x} x^k\}_1^\infty$ не полна в $L^2(P)$.

Теорема 8. 1) Существуют последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ и $\{\mu_k\}_1^\infty$ из нижней полуплоскости, для которых системы $\{e^{-\lambda_k x} x^k\}_1^\infty$ и $\{e^{-\mu_k x} x^m\}_1^\infty$ по отдельности не полны в $L^2(P)$, но их объединение в $L^2(P)$ полно.

2) Пусть $Q(t) = \sum_{k=0}^m c_k t^k$, ($c_k \geq 0$, $c_m \neq 0$, $m \geq n+1$). $P(t)$ — многочлен (5). Тогда существует последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$ из нижней полуплоскости, для которой система функций $\{e^{-\lambda_k x} x^k\}_{k=1}^\infty$ полна в пространстве $L^2(P)$, но не полна в $L^2(Q)$.

В заключение отметим, что основная идея доказательства теорем сводится к подходящему описанию линейных непрерывных функционалов в указанных пространствах, посредством классов голоморфных в круге или полуплоскости функций, растущих при приближении к их границе (см. (5-6)). После этого используются свойства нулей этих классов функций (см. (7-9)).

Ֆիսաժ ըկեոներով պարզ կոտորակների սխառնների լրիվությունը
հոլմորֆ, ընդհուպ մինչև եզրը ողորկ ֆունկցիաների
տարածություններում

Հոդվածում ուսումնասիրվում են շրջանում (կիսահարթությունում) հոլմորֆ, ընդհուպ մինչև եզրը ողորկ ֆունկցիաների տարածություններում ռացիոնալ ֆունկցիաների լրիվության հարցերը: Ստացված է նաև Մյունցի հայտնի թեորեմի անսլոգր կշռային $L^2(0, +\infty)$ տարածությունում:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

¹ Дж. Л. Уолш, Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, ИЛ, М., 1961. ² Н. Н. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, Наука, М., 1965. ³ М. М. Джрбашян, ДАН СССР, т. 141, № 3, с. 539—541 (1961). ⁴ Г. Ц. Тумаркин, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 1, № 2, с. 89—105 (1966). ⁵ Ф. А. Шамоян, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 8, № 6, с. 474—490 (1973). ⁶ Ф. А. Шамоян, ДАН АрмССР, т. 85, № 1, с. 7—12 (1987). ⁷ Ch. Horowitz, Duke Math. Journal, v. 41, № 1, p. 201—218 (1974). ⁸ J. H. Shapiro, Michigan Math. Journal, v. 24, № 2, p. 243—257 (1977). ⁹ B. Koremblum, Acta Math., v. 135, № 3—4, p. 187—219 (1975).