ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Том 89 1989 № 4

УДК 513.53

МАТЕМАТИКА

Г. М. Айрапетян

Задача сопряжения в классах L^p в особых случаях

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 6/V 1989)

Пусть T—единичная окружность, D^+—единичный круг, а D^-—множество $|z|>1$. Обозначим через $H(\Omega)$ класс функций, определенных на множестве Ω и удовлетворяющих условию Гельдера, а через $H_0(T; t_1, \ldots, t_n)$—класс функций, имеющих разрыв первого рода в точках $t_k \in T$ $(k=1, 2, \ldots n)$ и принадлежащих классу Гельдера в каждом интервале $[t_k, t_{k+1}]$, $k=1, 2, \ldots n$ $(t_{n+1}=t_1)$.

Задача сопряжения в классической постановке

$$\Phi^+(t)-D(t)\Phi^-(t)=f(t), \quad t\in T, \tag{1}$$

где $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$—искомые аналитические функции на D^+ и D^- соответственно, $D(t)$ и $f(t)$ функции, заданные на T, при различных предположениях на $D(t)$ и $f(t)$ изучены многими авторами. Полученные результаты и их приложения подробно изложены в работах ([1-7]) и др.

Предполагая, что $D(t)\neq 0$, $D(t)\in H_0(T; t_1, \ldots t_n)$, положим $\alpha_k+i\beta_k=(2\pi i)^{-1}(\ln D(t_k-0)-\ln D(t_k+0))$, где $\ln D(t)$ определенная ветвь логарифма на $[t_k, t_{k+1}]$. Если $p>1$ произвольное число, то обозначим через $T(p)$ подмножество множества $(t_1, t_2, \ldots t_n)$, состоящее из точек t_k таких, что $(1-\{\alpha_k\})p=1$ ($\{\alpha_k\}$—дробная часть числа α_k), а через $T'(p)$ и $T''(p)$ подмножества таких точек из $(t_1, t_2, \ldots t_n)$, для которых выполняются неравенства $(1-\{\alpha_k\})p<1$, $(1-\{\alpha_k\})p>1$ соответственно.

Далее, обозначим через $M(D)$ класс непрерывных функций $f(t)\geqslant 0$, обращающихся в нуль только в точках $t_k\in T(p)$ и допускающих представление $\rho(t)=\bar\rho(t)\prod\limits_{t_k\in T(p)} |\ln|t_k-t||^{-\frac{p}{q}}$, $t\in T$, $\bar\rho(t)\neq 0$, $\bar\rho(t)\in C(T)$, $q=p(p-1)^{-1}$.

При исследовании задачи сопряжения (1) в классе L^p важно иметь факторизацию функции $D(t)$ вида $D(t)=X^+(t)(X^-(t))^{-1}$, где $X(z)\in \tilde K_p(T)$, $(X(z))^{-1}\in \tilde K_q(T)$, $q=p(p-1)^{-1}$ (см. ([3,4])).

Когда $T(p)\neq\varnothing$, факторизации функции $D(t)$ в указанном смысле не существует. Этот случай назовем особым. В работе предлагается следующая постановка задачи сопряжения, когда можно провести полное исследование этой задачи, не имея такой факторизации.

З а д а ч а А. Найти голоморфную в $D^+\cup D^-$ функцию $\Phi(z)$, обращающуюся в нуль на бесконечности, по граничному условию

$$\lim_{r\to 1-0}\int_T |\Phi^+(r\alpha(t))-D(t)\Phi^-(r^{-1}t)-f(t)|^p\rho(t)|dt|=0, \tag{2}$$

где $\rho(t)\in M(D)$, $f(t)\in L^p(T)$, $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ сужения функции $\Phi(z)$ на D^+ и D^- соответственно, а $\alpha(t)$ — некоторый гомеоморфизм, отображающий T на себя. Отметим, что в особом случае задача A может обладать решениями, для которых $\Phi^+(z)\bar{\in} H^p(\rho)$($H^p(\rho)$ — класс Харди с весом ρ).

Везде предполагается, что $\alpha'(t)\in Lip(1)$.

1. Паре функций $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, определенных на D^+ и D^-, сопоставим функцию $\Phi(z)$ по равенству $\Phi(z)=\Phi^+(z)$ $(z\in D^+)$ и $\Phi(z)=$ $=\Phi^-(z)$ $(z\in D^-)$. Обратно, если $\Phi(z)$ определена на $D^+\cup D^-$, то через $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ обозначим сужения функции $\Phi(z)$ на D^+ и D^- соответственно.

По теореме о конформном склеивании (см. например ([1])) существует такое решение $\lambda(z)$ задачи $\lambda^+(\alpha(t))-\lambda^-(t)=0$, $t\in T$, что $\lambda^+(z)$ и $\lambda^-(z)$ $(\lambda^-(z)=z+\tilde{\lambda}^-(z)$, $\tilde{\lambda}^-(\infty)=0)$ конформно отображают области D^+ и D^- на некоторые области Δ_+ и Δ_- с общей границей и удовлетворяют условию Липшица в $D^+\cup T$ и $D^-\cap T$ соответственно. Положим

$$\Pi_p^+(z)=\prod_{k=1}^n(\lambda^+(z)-\lambda^+(\alpha(t_k)))^{\lambda_k}\ (z\in D^+),\quad \Pi_p^-(z)=\prod_{k=1}^n(\lambda^-(z)-\lambda^-(t_k))^{\lambda_k}\quad (z\in D^-),$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ — целые числа и выбираются так, чтобы имело место $-1<\lambda_k+\alpha_k\leqslant 0$, если $t_k\in T(p)\cup T'(p)$ и $0<\alpha_k+\lambda_k<1$, если $t_k\in T''(p)$.

Далее, положим $S_p^+(z)=e^{\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{\varphi(\beta(\tau))}{\tau-z}d\tau}$, $(z\in D)^+$, $S_p^-(z)=e^{\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau}$, $(z\in D^-)$, где $\beta(t)$ — функция, обратная к $\alpha(t)$, а $\varphi(t)$ — решение уравнения

$$K\varphi\equiv\varphi(t)-\frac{1}{2\pi i}\int_T\left(\frac{1}{\tau-t}-\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}\right)\varphi(\tau)d\tau=\ln D(t).$$

Введем в рассмотрение функцию $S_p(z)=S(z)\Pi_p(z)$, $z\in D^+\cup D^-$.

Теорема 1. *Если $\Phi(z)$ удовлетворяет условию (2) и имеет конечный порядок на бесконечности, то ее можно представить в виде*

$$\Phi^+(z)=\frac{S_p^+(z)}{2\pi i}\int_T\frac{\varphi(\beta(\tau))}{\tau-z}d\tau,\quad z\in D^+,$$

$$\Phi^-(z)=\frac{S_p^-(z)}{2\pi i}\int_T\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau+S_p^-(z)Q(z),\quad z\in D, \tag{3}$$

где $Q(z)$ определенный полином, а $\varphi(t)$ — решение уравнения $K\varphi=$ $=Q(t)+f(t)(S_p^+(\alpha(t)))^{-1}$.

Доказательство. Пусть $f_r(t)\in H(T)$ и $f_r(t)\to f(t)$ по метрике $L^p(T)$. Так как $S_p^+(\alpha(t))-D(t)S_p^-(t)=0$ и $(S_p^+(t))^{-1}\in L^q(T)$, для некоторого $q'>q$ $(q=p(p-1)^{-1})$, то условие (2) можно записать в виде

$$\lim_{r\to 1-0}\left\|\frac{\Phi^+(r\alpha(t))}{S_p^+(\alpha(t))}-\frac{\Phi^-(r^{-1}t)}{S_p^-(t)}-\frac{f_r(t)}{S_p^+(\alpha(t))}\right\|_1=0.$$

Обозначив $\Psi_r(t)=\Phi^+(r\alpha(t))(S_p^+(\alpha(t)))^{-1}-\Phi(r^{-1}t)(S_p^-(t))^{-1}-f_r(t)(S_p^+(\alpha(t)))^{-1}$, $F_r^+(z)=\Phi^+(rz)(S_p^+(z))^{-1}$ $(z\in D^+)$, $F_r^-(z)=\Phi^-(r^{-1}z)(S_p^-(z))^{-1}$ $(z\in D^-)$, будем иметь $F_r^+(\alpha(t))-F_r^-(t)=\Psi_r(t)+f_r(t)(S_p^+(\alpha(t)))^{-1}$, $t\in T$. Так как функции $F_r^+(z)$ и $F_r^-(z)$ представимы в виде интеграла типа Коши с плотностью из класса $L^q(T)$, то (см. ([3,4]))

$$F_r^+(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{\varphi_r(\beta(\tau))}{\tau-z}d\tau\ \ (z\in D^+),\quad F_r^-(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{\varphi_r(\tau)}{\tau-z}d\tau+Q_r(z)\ (z\in D^-),$$

где $Q_r(z)$—главная часть функции $F_r^-(z)$ на бесконечности, а $\varphi_r(t)$—решение уравнения $K\varphi=\Psi_r(t)+Q_r(t)+f_r(t)(S_p^+(\alpha(t)))^{-1}$. Переходя к пределу, когда $r\to 1-0$, завершаем доказательство теоремы.

Лемма 1. *Если $f(t)\in H(T)$, то функция $\Phi(z)$ из (3) удовлетворяет условию (2).*

Доказательство. Не нарушая общность, можно считать, что множество $T(p)$ состоит из одной точки t_1. Достаточно рассмотреть случай, когда $f(t)\equiv 0$ вне некоторой окрестности V точки t_1, которая не содержит других точек из множества $(t_1, t_2, \ldots t_n)$. Из (3) имеем $|\Phi^+(r\alpha(t))-D(t)\Phi^-(r^{-1}t)-f(t)|\leqslant C_1(|S_p^+(r\alpha(t))-D(t)S_p^-(r^{-1}t)|+$ $+|S_p^+(r\alpha(t))|(1-r)^\delta)$, где $\delta>0$, C_1—постоянная. Так как при $t\in V$

$$|S_p^+(r\alpha(t))-D(t)S_p^-(r^{-1}t)|\leqslant C_2|S_p^+(r\alpha(t))|\cdot\left(\frac{1-r}{|t_1-rt|}+(1-r)^{\delta_1}\right)$$

$$(\delta_1>0,\ C_2=\text{const}),\tag{4}$$

то $$\int_T|\Phi^+(r\alpha(t))-D(t)\Phi^-(r^{-1}t)-f(t)|^p\rho(t)|dt|\leqslant C_3\int_T\frac{1-r^2}{|t_1-rt|^2}\rho(t)|dt|.$$

Учитывая, что $$\lim_{r\to 1-0}\int_T\frac{1-r^2}{|t_1-rt|^2}\rho(t)|dt|=\rho(t_1)=0,$$

завершаем доказательство леммы.

2. Положим

$$k_r(\tau, t)=\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-r\alpha(t)}-\frac{1}{\tau-rt},\quad k(\tau, t)=\frac{1}{\tau-t}-\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}\ \ (\tau, t\in T).$$

Учитывая, что $\alpha'(t)\in Lip\ (1)$, будем иметь

$$|k_r(\tau, t)+k(\tau, t)|<C\cdot P_r(\tau, t),\tag{5}$$

где $p_r(\tau, t)$ -ядро Пуассона, C—некоторая постоянная.

Далее положим

$$(K_rf)(t)=\frac{S_p^+(r\alpha(t))}{2\pi i}\int_T\frac{f(\tau)}{S_p^+(\alpha(\tau))}(k_r(\tau, t)+k(\tau, t))d\tau.$$

$$(B_r f)(t)=\frac{S_p^+(r\alpha(t))-D(t)S_p^-(r^{-1}t)}{2\pi i}\int_T \frac{f(\tau)}{S_p^+(\alpha(\tau))}\frac{d\tau}{\tau-r^{-1}t}.$$

Применяя оценки (4) и (5), можно доказать:

Лемма 2. *Существует число C, не зависящее от r, такое, что*

$$\|K_r f\|_p\leqslant C\|f\|_p,\quad \|(B_r f(t)|^p\rho(t)\|_1\leqslant C\|f\|_p^p\quad (\rho(t)\in M(D)).$$

Теорема 2. *Пусть $f(t)\in L^p(T)$. Для того, чтобы голоморфная в $D^+\cup D^-$ функция $\Phi(z)$, имеющая конечный порядок на бесконечности, удовлетворяла условию* (2), *необходимо и достаточно, чтобы она имела вид* (3).

Доказательство. Учитывая теорему 1, достаточно доказать, что любая функция вида (3) удовлетворяет условию (2). Пусть $f_n(t)\in H(T)$ и $\|f_n(t)-f(t)\|_p\to 0$ при $n\to\infty$. Положим $\tilde\Phi_n^+(z)=$

$$=\frac{S_p^+(z)}{2\pi i}\int_T\frac{\tilde\varphi_n(\beta(\tau))}{\tau-z}d\tau\ (z\in D^+),\quad \tilde\Phi_n^-(z)=\frac{S_p^-(z)}{2\pi i}\int_T\frac{\tilde\varphi_n(\tau)}{\tau-z}d\tau+S_p^-(z)Q(z)$$

$(z\in D^-)$, $J_n(r,t)=\tilde\Phi_n^+(r\alpha(t))-D(t)\tilde\Phi_n^-(r^{-1}t)-f_n(t)$, где $\tilde\varphi_n(t)$ — решение уравнения $K\varphi=Q(t)+f_n(t)(S_p^-(\alpha(t)))^{-1}$. Обозначив $\Psi_n(t)=\tilde\varphi_n(t)-\varphi_n(t)$, будем иметь

$$\Phi^+(r\alpha(t))-D(t)\Phi^-(r^{-1}t)-f(t)=(K_r(f_n-f))(t)+(B_r(f_n-f))(t)+$$

$$+\frac{S_p^+(r\alpha(t))-D(t)S_p^-(r^{-1}t)}{2\pi i}\int_T\frac{\tilde\Psi_n(\tau)}{\tau-r^{-1}t}d\tau+\frac{S_p^+(r\alpha(t))}{2\pi i}\int_T(k_r(\tau,t)+$$

$$+k(\tau,t))\tilde\Psi_n(\tau)d\tau-S_p^-(r\alpha(t))\tilde\Psi_n(t)+J_n(r,t)+f_n(t)-f(t),$$

где

$$\tilde\Psi_n(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_T k(\tau,t)\Psi_n(\tau)d\tau.$$

Для завершения доказательства теоремы остается учесть, что $\tilde\Psi_n(t)\in H(T)$, и применить леммы 1 и 2.

3. Для любого $p(p<1)$ положим $\varkappa(p)=-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)$. Введем в рассмотрение функции

$$\Phi_k^+(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{\varphi_k(\beta(\tau))}{\tau-z}d\tau\quad(z\in D^+),\quad \Phi_k^-(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{\varphi_k(\tau)}{\tau-z}d\tau+z^k$$

$(z\in D^-)$, где $\varphi_k(t)$ — решение уравнения $K\varphi=t^k$, $k=0,1,2,\ldots$. Теперь из теоремы 2 непосредственно следует

Теорема 3. *Пусть $f(t)\in L^p(T)$, $T(p)\neq\varnothing$. Тогда общее решение задачи сопряжения А можно представить в виде*:

а) *если $\varkappa(p)\geqslant 0$, то*

$$\Phi^+(z)=\frac{S_p^+(z)}{2\pi i}\int_T\frac{\tilde\varphi(\beta(t))}{t-z}dt+S_p^+(z)\sum_{k=0}^{\varkappa(p)-1}C_k\Phi_k^+(z),\tag{6}$$

$$\Phi^-(z) = \frac{S_p^-(z)}{2\pi i}\int_T \frac{\tilde{\varphi}(t)}{t-z}\,dt + S_p^-(z)\sum_{k=0}^{\varkappa(p)-1} C_k\Phi_k(z),$$

где $C_0, C_1, \ldots C_{\varkappa(p)-1}$ — *произвольные комплексные числа при* $\varkappa(p)\geqslant 1$ *и* $C_0=C_1=\ldots=C_{\varkappa(p)-1}=0$ *при* $\varkappa(p)=0$, $K\tilde{\varphi}=f(t)(S_p^+(\alpha(t)))^{-1}$;

б) если $\varkappa(p)\leqslant -1$, *то задача имеет решение тогда и только тогда, когда*

$$\int_T \tilde{\varphi}(t)t^k dt = 0, \quad k=0, 1, \ldots -(\varkappa(p)+1),$$

при этом решение определяется по формуле (6), *если положить* $C_0=C_1=\ldots=C_{\varkappa(p)-1}=0$.

Аналогичные результаты можно получить и в случае, когда D^+ произвольная область, ограниченная контуром типа Ляпунова.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Հ. Մ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ

Համալուծման խնդիրը L^p դասերում եզակի դեպքում

Դիցուք T-ն միավոր շրջանագիծն է, D^+-ը միավոր շրջանը, իսկ D^--ը՝ $|z|>1$ բազմությունը։ Աշխատանքում հետազոտվում է համալուծման խնդիրը հետևյալ դրվածքով. գտնել $D^+\cup D^-$ բազմության վրա անալիտիկ $\Phi(z)$ ֆունկցիան այնպես, որ այն բավարարի հետևյալ եզրային պայմանին

$$\lim_{r\to 1-0}\int_T |\Phi^+(r\alpha(t))-D(t)\Phi^-(r^{-1}t)-f(t)|^p\rho(t)|dt|=0,$$

որտեղ $f(t)\in L^p(T)$, $D(t)$-ն կտոր առ կտոր անընդհատ ֆունկցիա է, $\rho(t)$-ն կշռային ֆունկցիա է, $\alpha(t)$-ն ուղղությունը պահպանող հոմեոմորֆիզմ է T-ի վրա, իսկ $\Phi^+(z)$-ը և $\Phi^-(z)$-ը $\Phi(z)$ ֆունկցիայի նեղացումներն են համապատասխանաբար D^+ և D^- բազմությունների վրա։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. И. Мусхелишвили*, Сингулярные интегральные уравнения, М., 1962. [2] *Ф. Д. Гахов*, Краевые задачи, М. 1963. [3] *Б. В. Хведелидзе*, Тр. Тбилисского мат. ин-та АН ГССР, т. 23 (1956). [4] *И. Б. Симоненко*, Изв. АН СССР. Сер. мат., т. 28, № 2 (1964) [5] *Г. А. Хускивадзе*, Тр. Тбилисского мат. ин-та АН ГССР, т. 31 (1966). [6] *И. И. Данилюк*, Нерегулярные граничные задачи на плоскости, М., 1975. [7] *Г. С. Литвинчук*, Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом, М., 1977.