ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Том 89 1989 №4

УДК 519.22

МАТЕМАТИКА

М. С. Гиновян

О распределении квадратичных функционалов от стационарного гауссовского процесса

(Представлено академиком АН Армянской ССР Р. В. Амбарцумяном 28/IV 1989)

В настоящей заметке приводятся результаты исследования асимптотического поведения квадратичных функционалов теплицева типа от гауссовского стационарного процесса с непрерывным временем. В п. 1 указываются условия, при которых нормированный квадратичный функционал имеет асимптотически нормальное распределение. В п. 2 рассматривается задача непараметрического оценивания линейного функционала от спектральной плотности, в частности, указаны оценки сверху для минимаксного среднеквадратичного риска предлагаемых оценок. В п. 3 приводится один новый результат из теории теплицевых операторов. Аналогичные задачи для процессов с дискретным временем рассматривались в работах ([1-4]), и приводимые ниже результаты являются дальнейшим развитием некоторых исследований этих работ.

1. Пусть $X(t)$, $-\infty<t<\infty$, —стационарный гауссовский процесс со средним нуль $(EX(t)=0)$ и спектральной плотностью (с. п.) $f(\lambda)$, $\lambda\in(-\infty,\infty)$. Рассмотрим квадратичный функционал теплицева типа от процесса $X(t)$, т. е. функционал $\widehat{L}_T$:

$$\widehat{L}_T=\frac{1}{T}\int\limits_0^T\int\limits_0^T\widehat{g}(u-v)X(u)\overline{X(v)}du\,dv, \tag{1}$$

где $\widehat{g}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda t}g(\lambda)d\lambda$ —преобразование Фурье некоторой суммируемой функции $g(\lambda)$, $\lambda\in(-\infty,\infty)$. Функцию $g(\lambda)$ будем называть порождающей для функционала (1).

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть с. п. $f(\lambda)\in L_1\cap L_{p_1}$, а порождающая функция $g(\lambda)\in L_1\cap L_{p_2}$, причем $p_k\geq 2$, $k=1, 2$, $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\leq\frac{1}{2}$. Тогда нормированный квадратичный функционал $T^{1/2}(\widehat{L}_T-E(\widehat{L}_T))$ имеет асимптотическое (при $T\to\infty$) нормальное распределение $N(0,\sigma^2)$, где*

$$\sigma^2=2\pi\int\limits_{-\infty}^{\infty}f^2(\lambda)g^2(\lambda)d\lambda.$$

2. Теперь рассмотрим следующую задачу непараметрического оценивания (ср. ([1,1])): пусть с. п. $f(\lambda)$ неизвестна, но известно, что она принадлежит заданному множеству спектральных плотностей Σ, и требуется по наблюдению $X(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, оценить значение известного линейного функционала L в точке f.

Ниже мы рассматриваем линейные функционалы $L(f)$, непрерывные в $L_p = L_p(-\infty, \infty)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Хорошо известно (см. ([5])), что всякий такой функционал допускает представление

$$L(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) g(\lambda) d\lambda, \tag{2}$$

где функция $g(\lambda) \in L_q$, $q = \dfrac{p}{p-1}$, и $\|L\| = \|g\|_q$, $\|\cdot\|_q$—норма в пространстве L_q.

В качестве оценки функционала (2) естественно рассматривать квадратичный функционал $\widehat{L}_T$, определенный формулой (1) (см. ([6])), который, как нетрудно убедиться, допускает представление

$$\widehat{L}_T = \int\limits_{-\infty}^{\infty} I_T(\lambda) g(\lambda) d\lambda, \tag{3}$$

где $I_T(\lambda) = \dfrac{1}{2\pi T} \left| \int\limits_0^T X(t) e^{-i\lambda t} dt \right|^2$—периодограмма процесса $X(t)$.

Обозначим через $H_p^\beta(C)$, $\beta = \alpha + r$, r—целое, $0 < \alpha < 1$, $C > 0$, множество функций $\varphi(\lambda) \in L_p$, имеющих в L_p r производных, причем производная $\varphi^{(r)}(\lambda)$ удовлетворяет в L_p условию Гельдера с показателем α и константой C, т. е.

$$\|\varphi^{(r)}(\cdot + h) - \varphi^{(r)}(\cdot)\|_p \leqslant C|h|^\alpha;$$

$\Sigma_p(c, \beta)$—множество спектральных плотностей, принадлежащих пространству $H_p^\beta(C)$; W_l—класс всех симметричных и неубывающих функций потерь w таких, что $w(0) = 0$ и при некоторых постоянных $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ $w(u) \leqslant C_1 \exp\{C_2|u|\}$.

Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть* $\Sigma = \Sigma_p(C_1, \beta_1)$, $(C_1 > 0,\ \beta_1 > 0)$, *а порождающая функция* $g(\lambda) \in H_q^{\beta_2}(C_2)$, $(C_2 > 0,\ \beta_2 > 0)$, *причем* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $\beta_1 + \beta_2 > \dfrac{1}{2}$. *Тогда если* $\|fg\|_2 \geqslant m > 0$, *то для всех* $w \in W_l$

$$\lim_{T \to \infty} E_f\{w(\sqrt{T}(\widehat{L}_T - L(f)))\} = Ew(\xi), \tag{4}$$

где ξ—*нормальная случайная величина со средним нуль и дисперсией* $\sigma^2 = 2\pi\|fg\|_2^2$, *а* $E_f\{\cdot\}$—*математическое ожидание по мере порожденной с. п.* $f(\lambda)$.

Обозначим через Δ_T^2 минимаксный среднеквадратичный риск оценки $\widehat{L}_T$, т. е.

$$\Delta_T^2 = \sup_{\|L\|=1} \inf_{\hat{L}_T} \sup_{f\in\Sigma} E_f|\hat{L}_T - L(f)|^2.$$

Следующая теорема дает оценки сверху для величины Δ_T^2 (ср. ([3])).

Теорема 3. *Пусть* $\Sigma = \Sigma_p(C, \beta)$, $(C>0, \beta>0)$, *а линейный функционал* L *непрерывен в пространстве* L_p, $1<p<\infty$. *Тогда*

$$\Delta_T^2 \leqslant \begin{cases} C_1 T^{-\frac{2\beta}{1+2\beta-\frac{2}{p}}}, & \text{если } p\geqslant 2;\ \beta\geqslant \frac{1}{p} \\ C_2 T^{-2\beta}, & \text{если } p\geqslant 2;\ \beta\leqslant \frac{1}{p} \\ C_3 T^{-2\beta}, & \text{если } 1<p\leqslant 2;\ \beta\leqslant \frac{1}{2} \\ C_4 T^{-1}, & \text{если } 1<p\leqslant 2;\ \beta\geqslant \frac{1}{2} \end{cases}.$$

где C_k, $k=\overline{1,4}$, *— некоторые постоянные.*

Замечания. 1. Аналог теоремы 1 для процессов с дискретным временем доказан в работе ([2]).

2. Теорема 2 является обобщением теоремы работы ([6]), в которой доказано соотношение (4) при условиях $p=q=2$, $r=0$.

3. Сходимость в (4) равномерна по f и L в классе $\Phi(m, C_1, C_2)$ — всех f и L таких, что $f\in\Sigma_p(C_1, \beta_1)$ $g\in H_q^{\beta_2}(C_2)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\beta_1+\beta_2>\frac{1}{2}$; $\|fg\|_2\geqslant m>0$.

3. Доказательства теорем 1—3 существенно опираются на следующий результат из теории теплицевых операторов, который, впрочем, представляет и самостоятельный интерес (ср. ([7])).

Обозначим через H_T пространство целых функций степени не выше T, и пусть P_T ортопроектор в L_2 на подпространство H_T. Для функции $\varphi(\lambda)\in L_1$ определим усеченный оператор Теплица $A_T(\varphi)$ равенством $A_T(\varphi)=P_T\varphi P_T$, где φ — оператор умножения на функцию $\varphi(\lambda)$, и пусть $\operatorname{tr}|A|$ — след оператора A.

Теорема 4. *Пусть функции* $f_k(\lambda)\in L_1\cap L_{p_k}$, $1\leqslant p_k\leqslant\infty$, $k=\overline{1,n}$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) *если* $\nu=\sum_{k=1}^{n} p_k^{-1}\leqslant 1$, *то*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\operatorname{tr}\left|\prod_{k=1}^{n} A_T(f_k)\right| = \int_{-\infty}^{\infty}\prod_{k=1}^{n} f_k(\lambda)\,d\lambda;$$

б) *если же* $\nu+\varepsilon>1$, $\varepsilon>0$, *то*

$$\lim_{T\to\infty} T^{-(\nu+\varepsilon)}\operatorname{tr}\left|\prod_{k=1}^{n} A_T(f_k)\right| = 0.$$

Отметим, что аналогичный результат для теплицевых матриц доказывается в работе ([2]).

Академия наук Армянской ССР
Институт математики

Մ. Ս. ԳԻՆՈՎՅԱՆ

Ստացիոնար գաուսյան պրոցեսից քառակուսային ֆունկցիոնալների բաշխման մասին

Դիցուք $X(t)$, $-\infty<t<\infty$ *զրոյական միջինով և* $f(t)$, $t\in(-\infty,\infty)$ *սպեկտրալ խտությամբ ստացիոնար գաուսյան պրոցես է, իսկ* $g(t)$, $t\in(-\infty,\infty)$ *ինչ-որ հանրագումարելի ֆունկցիա է։*

Հոդվածում դիտարկվում է $X(t)$ *պրոցեսով և* $g(t)$ *ֆունկցիայով ծնված* $\hat{L}_T$ *քառակուսային ֆունկցիոնալը, որը որոշվում է հետևյալ բանաձևով.*

$$\hat{L}_T=\frac{1}{T}\int_0^T\int_0^T\hat{g}(u-v)X(u)\overline{X(v)}\,du\,dv,$$

որտեղ $\hat{g}(t)$*-ն* $g(t)$ *ֆունկցիայի Ֆուրյեի ձևափոխությունն է։ Բերված են պայմաններ, որոնց դեպքում* $T^{1/2}(\hat{L}_T-E(\hat{L}_T))$ *նորմավորված քառակուսային ֆունկցիոնալն ունի ասիմպտոտիկ (երբ* $T\to\infty$*) նորմալ բաշխում։ Դիտարկվում է նաև սպեկտրալ խտությունից գծային ֆունկցիոնալի գնահատման խնդիրը։ Ստացված են գնահատականներ միջին քառակուսային շեղումների համար։*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *R. Z. Has'minskii, I. A. Ibragimov*, Probability Theory and Rel. Fields, v. 73, № 3 (1986). [2] *F. Avram*, Probability Theory and Rel. Fields, v. 79, № 1 (1988). [3] *И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский*, Зап. научн. семин. ЛОМИ, т. 153 (1987). [4] *М. С. Гиновян*, Теория вероятностей и ее применения, т. 33, в. 2 (1988). [5] *Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь*, Лекции по функциональному анализу, Мир, М., 1979. [6] *М. С. Гиновян*, Теория вероятностей и ее применения, т. 33, в. 4 (1988). [7] *У. Гренандер, Г. Сеге*, Теплицевы формы и их применения, ИЛ, М., 1961..