

УДК 529.3.01

С. М. Мхитарян, Мохамед Абдалла Ахмед Абду
 ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

О различных методах решения интегрального уравнения Карлемана

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 24/V 1989)

Многие контактные и смешанные задачи теории упругости, когда модуль упругости основания по вертикальной координате изменяется по степенному закону, а коэффициент Пуассона постоянен ^(1, 2), или в первом приближении нелинейной теории установившейся ползучести при степенной зависимости между интенсивностями напряжений и скоростей деформаций ⁽³⁾, сводятся к интегральному уравнению

$$\int_{-a}^a \frac{\varphi(s)ds}{|t-s|^h} = f(t) \quad (0 < h < 1) \quad (0.1)$$

Это уравнение впервые было рассмотрено в работе ⁽⁴⁾, где его решение построено методом продолжения уравнения в комплексную плоскость. Этим же методом в сочетании с зависимостями, устанавливающими связь между операторами дробного интегрирования с сингулярным интегралом с ядром Коши ⁽⁵⁾, в ^(5, 6) построено эффективное решение более общего, нежели (0.1), уравнения. Довольно простое решение уравнения (0.1) в обычных квадратурах получено в ^(7, 8). Решение этого уравнения методом ортогональных многочленов Гегенбауэра дано в ^(2, 9, 10), а методом парных интегральных уравнений—в ⁽¹¹⁾, причем решение по последнему методу имеет фактически ту же самую структуру, что и решение по методу М. Г. Крейна ^(7, 8).

Указанными методами решение уравнения (0.1) выражается формулами различных аналитических структур, и естественно установить их непосредственную взаимосвязь. Выяснение этого вопроса, который одновременно представляет и самостоятельный интерес, важно также для выработки эффективного алгоритма численной реализации упомянутого выше класса контактных и смешанных задач, чего можно достичь сравнением вычислительных характеристик этих формул. В настоящей статье показывается, что в достаточно широком классе функций $f(t)$ различные формулы решения уравнения (0.1), полученные в ^(5 - 9), переходят одна в другую. Здесь же отмечается, что уравнение (0.1) является частным случаем интегрального уравнения с ядром в виде интеграла Вебера—Сонина. Это обстоятельство позволяет на уравнение (0.1) и различные формулы его решения смотреть с единой и общей точки зрения, как в плане его аналитического, так и численного решения.

1. В дальнейшем будем предполагать, что $f(t) \in C_1[-a, a] \cap (C_1[-a, a])$ —класс непрерывных и непрерывно дифференцируемых на сегменте

$[-a, a]$ функций) и, кроме того, $f(t)$ удовлетворяет условиям разложимости в ряд по ортогональным многочленам Гегенбауэра ⁽¹²⁾ в интервале $(-a, a)$.

Положив

$$\varphi(t) = \varphi_+(t) + \varphi_-(t), \quad f(t) = f_+(t) + f_-(t) \quad (|t| < a)$$

$$(\varphi_{\pm}(-t) = \pm \varphi_{\pm}(t), \quad f_{\pm}(-t) = \pm f_{\pm}(t)),$$

уравнение (0.1) сведем к следующим уравнениям:

$$\int_0^a \left[\frac{1}{|t-s|^h} \pm \frac{1}{(t+s)^h} \right] \varphi_{\pm}(s) ds = f_{\pm}(t) \quad (0 < t < a). \quad (1.1)$$

Далее, поскольку ⁽¹³⁾, с. 19, формула 1.3 (1))

$$\int_0^{\infty} \cos(\lambda t) \lambda^{h-1} d\lambda = \Gamma(h) \cos(\pi h/2) t^{-h} \quad (t > 0),$$

где $\Gamma(h)$ — гамма-функция Эйлера, уравнения (1.1) можем представить в виде $(0 < t < a)$

$$\int_0^a \sqrt{t, s} W_{\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}}(t, s) \varphi_{\pm}(s) ds = \pi^{-1} \Gamma(h) \cos(\pi h/2) f_{\mp}(t),$$

где

$$W_{\nu, \nu}^{\mu}(t, s) = \int_0^{\infty} J_{\nu}(\lambda t) J_{\nu}(\lambda s) \lambda^{\mu} d\lambda \quad (\operatorname{Re}(2\nu+1) > -\operatorname{Re}\mu > -1)$$

известный интеграл Вебера — Сонина, а $J_{\nu}(x)$ — бесселева функция первого рода индекса ν .

Теперь, согласно ⁽⁸⁾, решение уравнения (1.1) при четной правой части $f_+(t)$ выражается формулой

$$\varphi_+(t) = C(h) \left\{ a^{1-h} (a^2 - t^2)^{(h-1)/2} J(a) - \int_t^a (\xi^2 - t^2)^{(h-1)/2} \times \right.$$

$$\times \frac{d}{d\xi} [\xi^{1-h} J(\xi)] d\xi \Bigg\}; \quad J(\xi) = \frac{d}{d\xi} \int_0^{\xi} (\xi^2 - s^2)^{(h-1)/2} f_+(s) ds; \quad (1.2)$$

$$C(h) = \pi^{-5/2} \Gamma(h/2) \Gamma[(1-h)/2] \cos^2(\pi h/2); \quad 0 < t < a;$$

а уравнения (1.1) при нечетной правой части $f_-(t)$ — формулой

$$\varphi_-(t) = -C(h) \frac{d}{dt} \int_t^a \left(1 - \frac{t^2}{\xi^2}\right)^{(h-1)/2} d\xi \int_0^{\xi} \frac{f_-(s) ds}{(\xi^2 - s^2)^{(1-h)/2}}. \quad (1.3)$$

В дальнейшем в формулах (1.2) — (1.3) и везде положим, без нарушения общности, $a=1$.

Далее по известным результатам ^(5, 6)

$$\Phi_h(t) = \int_{-1}^t \frac{\varphi(s)ds}{(t-s)^h} = \frac{1}{2}f(t) - \frac{1}{2\pi} \operatorname{ctg}(\pi h/2) \times$$

$$\times (1-t^2)^{(1-h)/2} \int_{-1}^1 \frac{(1-s^2)^{(h-1)/2} f(s)ds}{s-t} \quad (|t| < 1), \quad (1.4)$$

где последний интеграл при $t=s$ понимается в смысле главного значения по Коши, откуда решение исходного интегрального уравнения (0.1) получится простым обращением уравнения Абеля.

Наконец, в уравнении (0.1) положим

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n C_n^{h/2}(t) \quad (|t| < 1) \quad (1.5)$$

и воспользуемся известным спектральным соотношением (2.9, 10)

$$\int_{-1}^1 \frac{C_n^{h/2}(s)ds}{|t-s|^h (1-s^2)^{(1-h)/2}} = \lambda_n C_n^{h/2}(t) \quad (|t| < 1),$$

$$\lambda_n = \pi \Gamma(n+h) [n! \Gamma(h) \cos(\pi h/2)]^{-1} \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad (1.6)$$

где $C_n^{h/2}(t)$ — ортогональные многочлены Гегенбауэра. В результате (1.5) получим следующую формулу решения уравнения (0.1):

$$\varphi(t) = (1-t^2)^{(h-1)/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda_n^{-1} C_n^{h/2}(t) \quad (|t| < 1). \quad (1.7)$$

Приведенные формулы (1.2) — (1.5) и (1.7) имеют разные аналитические и вычислительные характеристики. Формулы М. Г. Крейнз (1.2) — (1.3) имеют стройную аналитическую структуру и не содержат сингулярные в смысле Коши интегралы. С другой стороны, ввиду того, что в эти формулы входят производные по параметрам, при их численной реализации из-за большой сложности алгоритма могут возникать трудности. Формула (1.4) обладает довольно простой структурой, но содержит сингулярный интеграл, берущийся в смысле главного значения по Коши, вычисление которого наталкивается на известные трудности. Формулы (1.5) и (1.7) также довольно просты. Однако в случае негладких функций $f(t)$ ряды (1.7), как правило, оказываются медленно сходящимися, что затрудняет их вычисление. С учетом этих характеристик в дальнейшем мы намерены выработать эффективные алгоритмы численной реализации указанных формул, о чем будет сообщено позже.

Здесь же покажем, что исходя из формул (1.2) — (1.3) и (1.4) можно получить формулу (1.7). Тем самым будет показано, что эти различные по своим структурам формулы совпадают между собой.)

2. Обращаясь к формуле (1.4), положим в ней $f(t) = C_n^{h/2}(t)$ ($n=0, 1, 2, \dots$) и вычислим появившийся при этом интеграл с ядром Коши. С этой целью на основании известного представления (12) (с. 86, формулы 4.61.4 — 4.61.5) показывается, что имеет место интегральное соотношение

$$\int_{-1}^1 \frac{(1-s^2)^x C_n^{h/2}(s) ds}{s-t} = -\pi \operatorname{tg}(\pi h/2) (1-t^2)^x C_n^{h/2}(t) + \\ + \pi \sqrt{\pi} 2^{-x} |\Gamma(h/2) \cos(\pi h/2)|^{-1} (1-t^2)^{x/2} P_{n+x}^x(t) \quad (|t| < 1). \quad (2.1)$$

($n=0, 1, 2, \dots; x=(h-1)/2$).

Здесь $P_n^x(t)$ — функция Лежандра первого рода. Из (2.1) в частных случаях получается ряд известных соотношений.

Подставляя теперь выражение упомянутого интеграла с ядром Коши из (2.1) в формулу (1.4), получим

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(s) ds}{(t-s)^h} = (-1)^n \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{cosec}(\pi h/2)}{2^{(h+1)/2} \Gamma(h/2)} (1-t^2)^{-x/2} P_{n+x}^x(-t) \quad (|t| < 1). \quad (2.2)$$

Далее (2.2) обращаем как интегральное уравнение Абеля, а затем воспользуемся известной формулой из (14) (с. 140, формула (54)). В результате будем иметь ($|t| < 1$)

$$\varphi(t) = (-1)^n \frac{2^{-x} \cos(\pi h/2) \Gamma(h)}{\sqrt{\pi} \Gamma(h/2)} \frac{d}{dt} [(1-t^2)^{(1+x)/2} P_{n+x}^{-1-x}(-t)].$$

Учитывая известные соотношения между функциями Лежандра $P_n^x(x)$, $Q_n^x(x)$, $P_n^{-x}(x)$ и $P_n^x(\pm x)$ ((15), с. 145, формулы (13), (14), (17)), отсюда находим

$$\varphi(t) = - \frac{2^{-x/2} \Gamma(h) \cos(\pi h/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(h/2)} \frac{d\chi_n^h(t)}{dt} \quad (n=0, 1, 2, \dots; |t| < 1), \\ \chi_n^h(t) = (1-t^2)^{(x+1)/2} P_{n+x}^{-1-x}(t) \quad (n=1, 2, \dots; x=(h-1)/2), \quad (2.3) \\ \chi_0^h(t) = (1-t^2)^{(x+1)/2} \left[P_x^{-1-x}(t) - \frac{\pi \sec(\pi h/2)}{\Gamma(1+h)} P_{\frac{1}{2}+x}^1(t) \right].$$

Дальнейшее использование формул из (15) (с. 162, формула (16), с. 177, формула (4)) позволяет записать

$$\frac{d\chi_n^h(t)}{dt} = \frac{2^{-x} \Gamma(h) \Gamma(n)}{\Gamma(n+h) \Gamma(1+x)} \frac{d}{dt} \left\{ (1-t^2)^x \left[t C_n^{h/2}(t) - \frac{n+1}{n+h} C_{n+1}^{h/2}(t) \right] \right\} \\ (n=1, 2, \dots; |t| < 1).$$

Далее, применяя формулу дифференцирования многочленов Гегенбауэра и рекуррентные соотношения между ними, отсюда, в соответствии с (2.3), получим

$$z(t) = i \frac{1}{n} (1-t^2)^{(h-1)/2} C_n^{h/2}(t) \quad (n=1, 2, \dots; |t| < 1). \quad (2.4)$$

Таким же путем, исходя из функции $\chi_0^h(t)$ формулы (2.3), покажем, что (2.4) имеет место также при $n=0$.

Если обратить интегральное уравнение Абеля (1.4), когда $f(t) = C_n^{h/2}(t)$ ($n=0, 1, 2, \dots$), то полученный результат эквивалентен тому, что имеет место соотношение

$$\frac{\sin(\pi h)}{2\pi} \frac{d}{dt} \left[\int_{-1}^t \frac{C_n^{h/2}(s) ds}{(t-s)^{1-h}} - \frac{1}{\pi} \operatorname{ctg}(\pi h/2) \int_{-1}^1 L(t, s) C_n^{h/2}(s) ds \right] =$$

$$= \lambda_n^{-1} (1-t^2)^{(h-1)/2} C_n^{h/2}(t) \quad (n=0, 1, 2, \dots; |t| < 1); \quad (2.5)$$

$$L(t, s) = (1-s^2)^{(h-1)/2} \int_{-1}^1 (1-u^2)^{(1-h)/2} (t-u)^{h-1} (s-u)^{-1} du.$$

Очевидно, что соотношения (2.4) или (2.5) эквивалентны спектральному соотношению (1.6). Следовательно, если в (1.4) подставить разложение (1.5), то на основании изложенных результатов придем к (1.7), что и требовалось показать.

Переход же от формул (1.2), (1.3) к (1.7) более сложен и требует отдельного рассмотрения.

Институт механики Академии наук Армянской ССР
Ереванский государственный университет

Ս. Մ. ՄԵԼԻՔԱՆԻԱՆ, ՄՈՂԱՄԵԴ ԱՐԴԱԼԱ ԱՀՄԵԴ ԱՐԻՈՒ

Կառլեմանի ինտեգրալ հավասարման լուծման տարբեր մեթոդների մասին

Աշխատանքում բերվում են առաձգականության տեսության խառը և կոնտակտային խնդիրների քննադատական հաճախ հանդիպող Կառլեմանի ինտեգրալ հավասարման լուծման բանաձևերը եզակի ինտեգրալ հավասարումների մեթոդով, Մ. Գ. Կրեյնի մեթոդով և Գեգենբաուերի օրթոգոնալ բազմանդամների մեթոդով: Այդ բանաձևերը ունեն տարբեր անալիտիկ կառուցվածքներ և տարբեր հաշվողական քննադատական, որոնց հաշվառումը անհրաժեշտ է Կառլեմանի ինտեգրալ հավասարման թվային իրագործման միասնական ու արդյունավետ ալգորիթմ մշակելու համար: Նշված ճանապարհին անհրաժեշտություն է առաջանում ցույց տալու ստացված անալիտիկ բանաձևերի փոխկապակցությունը և անցում մեկը մյուսին, որը և արվում է ներկա աշխատանքում: Միաժամանակ աշխատանքում ստացված են Գեգենբաուերի բազմանդամներ պարունակող հրկու նոր ինտեգրալ առնչություններ, որոնցից մեկը համարժեք է նույն բազմանդամներ պարունակող հայտնի սպեկտրալ առնչությանը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Развитие теории контактных задач в СССР, Наука, М., 1976. ² Г. Я. Попов, Контактные задачи для линейно-деформируемого основания, Вища школа, Киев—Одесса, 1982. ³ Н. Х. Арутюнян, ПММ, т. 23, вып. 5, с. 901—924 (1959). ⁴ Т. Carleman, Mat. Z., Bd. 15, H 1/2, S. 111—120 (1922). ⁵ С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Марицев, Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения, Наука и техника, Минск, 1987. ⁶ Ф. Д. Гахов, Краевые задачи, Наука, М., 1977. ⁷ М. Г. Крейн, ДАН СССР, т. 100, № 3, с. 413—416 (1955). ⁸ И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения, Наука, М., 1967. ⁹ Г. Я. Попов, ПММ, т. 27, вып. 5 с. 821—832 (1963). ¹⁰ С. М. Мхитарян, ПММ, т. 47, вып. 2, с. 219—227 (1983). ¹¹ Я. С. Уфлянд, Метод парных уравнений в задачах математической физики, Наука, Л., 1977. ¹² Г. Сеге, Ортогональные многочлены, ФМ, М., 1962. ¹³ Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Таблицы интегральных преобразований. Т. 1, Наука, М., 1969. ¹⁴ Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Таблицы интегральных преобразований. Т. 2, Наука, М., 1970. ¹⁵ Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции. Т. I, Наука, М., 1973.