ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Том 89 1989 № 3

УДК 517.27

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

В. К. Брутян

О сравнении функций чувствительности разомкнутой и замкнутой оптимальных нелинейных систем управления

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 15/V 1989)

Постановка задачи. Рассматривается управляемая система, поведение которой описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x}=\psi(t, x, u, \mu),\ x(t_0)=x_0,\ t\in[t_0, T]\overset{\Delta}{=}I_t, \tag{1}$$

где x—n-мерный вектор состояния, u—r-мерный вектор управления, μ—m-мерный вектор параметров, являющихся непрерывными функциями времени t.

Задача управления состоит в оптимальном переводе системы из начального состояния x_0 в некоторую точку $x(T)=x_T$ пространства состояний системы. Критерием оптимальности служит минимум функционала

$$J=\Phi(T, x(T))+\int_{t_0}^{T} L(t, x, u)dt, \tag{2}$$

где Φ и L скалярные функции, непрерывные по t и дважды непрерывно дифференцируемые по x и u.

Номинальное значение вектора параметров $\mu(t)$ обозначим $\bar{\mu}(t)$.

Предполагается: 1) функция ψ непрерывна по t и дважды дифференцируема по x и μ; 2) для параметров $\mu(t)=\bar{\mu}(t)$ существует единственное непрерывное оптимальное решение, которое обозначается через $\{x^*(t), u^*(t)\}$; 3) существует однозначный оптимальный закон управления $v(t, x)$, непрерывный по t и дифференцируемый по x; 4) функция v определяется в некоторой $(n+1)$-мерной окрестности решения $x^*(t)$ при $t\in I_t$; 5) закон оптимального управления определяется выражением $u^*(t)=-v(t, x^*(t))$, кроме того, для всех (t, x), для которых функция $v(t, x)$ определена, закон управления $u=-v(t, x)$ является единственным.

Из этих предположений следует, что решение задачи оптимизации имеет обычную форму и что отсутствуют сингулярные точки ([1, 2]).

Пусть непрерывные вариации параметров $\varepsilon\delta\mu(t)$ определяются равенством $\varepsilon\delta\mu(t)=\mu(t)-\bar{\mu}(t)$, а соответствующие им вариации—выражением $\varepsilon\delta x(t)$. При $\varepsilon\to 0$ вариация δx удовлетворяет известному дифференциальному уравнению в вариациях:

$$\dot{\delta x} = \psi_x \delta x + \psi_\mu \delta\mu + \psi_u \delta u, \quad \delta x(t_0) = 0, \tag{3}$$

где матрицы частных производных ψ_x, ψ_u и ψ_μ вычисляются по переменным $\{x^*(t), u^*(t), \bar{\mu}(t)\}$ ([3]). Из сделанного предположения 2 следует, что решение дифференциального уравнения (3) также существует на интервале I_1. При этом нормы вариаций $\delta x(t)$ являются мерами чувствительности ([4]).

Целью исследования является сравнение по чувствительности замкнутой системы с управлением $u(t, x) = -v(t, x)$ и разомкнутой системы с управлением $u(t) = u^*(t; t_0, x_0, \bar{\mu}(t))$. Для нахождения условий малой чувствительности замкнутого контура используется критерий

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta x_з'(t) R(t) \delta x_з(t) dt < \int_{t_0}^{t_1} \delta x_p'(t) R(t) \delta x_p(t) dt, \quad t_1 \in (t_0, T], \tag{4}$$

где индексы „з" и „р" относятся к замкнутой и разомкнутой системам соответственно, верхний индекс означает транспонирование матрицы, $R(t)$ неотрицательно определенная симметричная матрица.

Решение задачи. Для разомкнутой системы, когда $\delta u = 0$, уравнение (3) примет вид

$$\dot{\delta x}_p = \psi_x \delta x_p + \psi_\mu \delta\mu, \qquad \delta x_p(t_0) = 0,$$

а для замкнутой системы, когда $\delta u = -v_x \delta x_з$, получим

$$\dot{\delta x}_з = \psi_x \delta x_з + \psi_\mu \delta\mu - \psi_u v_x \delta x_з, \qquad \delta x_з(t_0) = 0,$$

где матрицы ψ_x, ψ_u, ψ_μ и v_x вычисляются по совокупности переменных $\{x^*(t), u^*(t), \bar{\mu}(t)\}$. Пусть $A(t, \tau)$ — переходная матрица, соответствующая функции ψ_x, т. е. $\frac{\partial}{\partial t} A(t, \tau) = \psi_x A(t, \tau)$, $A(\tau, \tau) = 1$. Тогда

$$\delta x_p(t) = \int_{t_0}^{t} A(t, \tau) \psi_\mu \delta\mu(\tau) d\tau$$

и

$$\delta x_з(t) = \int_{t}^{t} A(t, \tau) [\psi_\mu \delta\mu(\tau) - \psi_u v_x \delta x_з(\tau)] d\tau,$$

или

$$\delta x_p(t) = \delta x_з(t) + w(t), \quad w(t) \overset{\Delta}{=} \int_{t_0}^{t_1} A(t, \tau) \psi_u v_x \delta x_з(\tau) d\tau. \tag{5}$$

Отсюда запишем равенство

$$\delta x_p'(t) R(t) \delta x_p(t) - \delta x_з'(t) R(t) \delta x_з(t) = 2\delta x_з'(t) R(t) w(t) + w'(t) R(t) w(t).$$

Для выполнения критерия (4) необходимо и достаточно в данном случае удовлетворить неравенство

$$\int_{t_0}^{t_1} [2\delta x_3'(t)R(t)w(t)+w'(t)R(t)w(t)]dt \geqslant 0, \ t_1 \in (t_0, T] \tag{6}$$

Уравнение (5) не зависит от $\delta\mu$ и ψ_μ, и следовательно, можно представить соотношение между вариациями δx_3 и δx_p в следующей форме: $\delta x_3 = p\delta x_p$. Оператор p носит название оператора сравнительной чувствительности ([3]).

Далее следует получить неравенство (6), используя условия оптимальности. Функция Гамильтона имеет вид $H(t, x, u, \lambda) = L(t, x, u) + \lambda'\psi(t, x, u)$. В точке (t, x, λ) H минимизируется с помощью единственного управления $u = K(t, x, \lambda)$, которое является непрерывным по t, непрерывно дифференцируемым по x и λ.

При анализе чувствительности интерес представляет матрица v_x, которая определяется соотношением ([1,3]): $v_x = -(K_x + K_\lambda\Gamma)$, где матрица усиления Γ является решением уравнения Риккати

$$-\dot{\Gamma} = \Gamma H^*_{\lambda x} + H^*_{x\lambda}\Gamma + \Gamma H^*_{\lambda\lambda}\Gamma + H^*_{xx}, \ H^* \stackrel{\Delta}{=} H(t, x, K(t, x, \lambda), \lambda). \tag{7}$$

Если на управление не наложено ограничений, то тогда в соответствии с общей теорией оптимизации ([5]) $v_x = H_{uu}^{-1}(H_{ux} + \psi_u'\Gamma)$. Отсюда получим: $-\dot{\Gamma} = \Gamma\psi_x + \psi_x'\Gamma - (\Gamma\psi_u + H_{xu})H_{uu}^{-1}(H_{ux} + \psi_u'\Gamma) + H_{xx}$, $\Gamma(T) = \Gamma_T$. Граничное условие Γ_T приводится к условию трансверсальности исходной задачи оптимизации и либо зависит от T, либо является свободным. Если T задан, то некоторые элементы матрицы Γ_T могут быть бесконечно большими и $\|v_x(T)\| \to \infty$ при $t \to T$. Ниже предполагается, что существует ограниченное решение $\Gamma(t)$ при $t \in [t_0, T)$. В этом случае имеется конечная матрица v_x и отсутствуют сингулярные точки. Более того, поскольку совокупность функций $\{x^*(t), u^*(t)\}$ определяет минимум критерия качества (2), то отсюда следует, что $\Gamma(t)$ при $t \in I_t$ является по крайней мере неотрицательно определенной.

Лемма. *Пусть в условии* (4) *матрица* $R(t)$ *задана формулой*

$$R(t) = -\Gamma(t)H^*_{\lambda\lambda}(t)\Gamma(t), \tag{8}$$

а управление принадлежит области с гладкими границами. Тогда необходимым и достаточным условием оптимальности системы (1) *по* (2) *при малой чувствительности замкнутого контура к непрерывным вариациям параметров в соответствии с условием* (4) *является выполнение неравенства*

$$w'(t_1)\Gamma(t_1)w(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} [w'(H^*_{xx} + 2K_x'\psi_u'\Gamma)w + 2\delta x_3' K_x'\psi_u'\Gamma w]dt \geqslant 0, \tag{9}$$

где $w(t)$ *определена формулой* (5). *Если на управление не накладывается ограничений, то* (8) *и соотношение* (9) *можно представить в виде*

$$R(t) = v_x'(t, x^*(t))H_{uu}(t)v_x(t, x^*(t)) \tag{8'}$$

и

$$w'(t_1)\Gamma(t_1)w(t_1)+\int_{t_0}^{t_1}[w'H_{xx}w+2\delta x_3'v_{\lambda}H_{ux}w]dt\geqslant 0. \tag{9'}$$

Следует заметить, что основным препятствием, которое затрудняло доказательство справедливости условий (9) и (9′), является наличие членов, содержащих матрицы K_x и H_{ux} соответственно. Эти члены исчезают для класса задач, рассматриваемых ниже.

Класс систем. Пусть управляемая система описывается уравнением

$$\dot{x}=\psi_1(t,x,\mu)+D(t,u,\mu),\quad x(t_0)=x_0, \tag{10}$$

где ψ_1 и D—n-мерные векторы, непрерывные по t, непрерывно дифференцируемые по μ и дважды дифференцируемые по x и u. Критерий качества представляется в виде

$$J=\Phi(x_T,T)+\int_{t_0}^{T}[B(t,x)+E(t,u)]dt, \tag{11}$$

где Φ, B и E скалярные функции, непрерывные по t и дважды непрерывно дифференцируемые по x и u. В остальном задача ставится так же, как и в предыдущем случае. Предполагается, что $H_{xx}\geqslant 0$. Это предположение является достаточным, чтобы гарантировать ограниченность решения уравнения Риккати. Рассматриваемую задачу можно трактовать как частный случай предыдущей общей задачи. Прямым следствием основной леммы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть матрица $R(t)$ определяется формулой (8) или (8′), а управление принадлежит области с гладкими границами. Пусть, кроме того, $H_{xx}\geqslant 0$. Тогда замкнутый контур оптимальной системы (10), полученной в соответствии с критерием качества (11), является менее чувствительным по сравнению с разомкнутым контуром к непрерывным вариациям параметров первого порядка в соответствии с условием (4). Знак равенства в этом условии имеет место тогда и только тогда, когда выполняется тождество $w'(t_1)\Gamma(t_1)w(t_1)+\int_{t_0}^{t_1}w'H_{xx}w\,dt=0$, где $w(t)$ определяется формулой (5), в которой принято $\psi_u=D_u$. Если матрица $H_{xx}>0$, то вдоль оптимального решения при номинальных параметрах знак равенства в условии (4) будет тогда и только тогда, когда выполняется тождество $\delta x_3(t)\equiv\delta x_p(t)$, $t\in[t_0,t_1]$.*

Ереванский институт народного хозяйства

Վ. Կ. ԲՐՈՒՏՅԱՆ

Օպտիմալ ոչ գծային կառավարման բաց և փակ համակարգերի զգայնության ֆունկցիաների համեմատման մասին

Աշխատանքում ցույց է տրված, որ զգայնության ֆունկցիայի ինվարիանտությունը՝ կառավարման օրենքի նկատմամբ, կապված է օպտիմալ համա-

կարգերի նոմինալության հետ։ Ցույց է տրված, որ կառավարման ընտրված տեսակը փոխում է օպտիմալ համակարգի զգայնության չափը և այս փաստը չի հակասում գոյություն ունեցող արդյունքներին, բայց առաջարկում է կոնկրետ խիստ պայմաններ օպտիմալ համակարգերի զգայնության ֆունկցիաների ինվարիանտության համար։ Ապացուցված է, որ փակ կառավարման համակարգերի զգայնության մասին վերջնական տվյալները կախված են զգայնության չափի այս աշխատանքում ընդունված հարաբերակցություններից։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. К. Брутян*, Основные аспекты теории непрерывных марковских управляемых систем и ее приложение, Айастан, Ереван, 1964. [2] *Б. К. Брутян*, ДАН АрмССР, т. 77, № 3 (1983). [3] *У. Флеминг, Р. Ришел*, Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами, Мир, М., 1978. [4] *В. К. Брутян*, Уч. зап. Ереванск. гос. ун-та, Серия Е. Н., т. 141, № 2 (1979). [5] *В. И. Зубов*, Лекции по теории управления, Наука, М., 1975.