ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Том 89 1989 №3

УДК 517.518.3

МАТЕМАТИКА

Ан. А. Талалян

О классификации U_p^*-множеств тригонометрических интегралов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракеляном 9/VI 1989)

Следуя работе ([1]), введем

Определение. *Скажем, что* $E\subset R$ *является* U_p^*-*множеством, если из того, что* $f(x)\in L_p(R)$ *и* $\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_{-A}^{A} f(t)e^{-itx}dt=0$ *для всех* $x\overline{\in}E$, *следует* $f(x)=0$ *почти всюду на* R.

В работе ([1]) доказано, что при любом p, $1<p\leqslant 2$, существует множество $E\subset R$, которое не является U_p^*-множеством, но является $U_{p'}^*$-множеством при всех $p'<p$. А для $1\leqslant p<2$ установлено, что существует U_p^*-множество, которое не является $U_{p'}^*$-множеством для $p'>p$.

Аналогичные вопросы для ортогональных рядов и характеров локально компактных абелевых групп рассмотрены в ([2–7]).

В настоящей работе рассматриваются U_p^*-множества тригонометрических интегралов при $2<p\leqslant\infty$. Получены аналоги результатов работ ([1,2]).

Верны следующие теоремы.

Теорема 1. *Для любого* p, $2<p\leqslant\infty$, *существует множество* E, *которое не является* U_p^*-*множеством и является* $U_{p'}^*$-*множеством при любом* $p'<p$.

Теорема 2. *Для любого* p, $2\leqslant p<\infty$, *существует множество* E, *которое является* U_p^*-*множеством и не является* $U_{p'}^*$-*множеством при всех* $p'>p$.

При доказательстве теорем 1, 2 мы в основном следуем схеме, предложенной в работах ([1,2]). Рассматриваются следующие функции $\lambda_h(x)$, $\varphi(x)$, $f(x)$,

$$\lambda_h(x)=\begin{cases}\dfrac{(9h+x)^2}{6h^2}, & -9h\leqslant x\leqslant -7h,\\[2mm] 1-\dfrac{(x+6h)^2}{3h^2}, & -7h\leqslant x\leqslant -6h,\\[2mm] 1, & -6h\leqslant x\leqslant -3h,\\[2mm] 1-\dfrac{(x+3h)^2}{3h^2}, & -3h\leqslant x\leqslant -2h,\\[2mm] \dfrac{x^2}{6h^2}, & -2h\leqslant x\leqslant 0,\\[2mm] 0, & -\infty\leqslant x\leqslant -9h,\end{cases}$$

$$\lambda_n(-x) = -\lambda_n(x).$$

Для определения функций $\varphi(x)$ и $f(x)$ отрезок $\left[\frac{x-1}{2^k}\pi, \frac{x}{2^k}\pi\right]$, $k\in N$, $x\in Z$, разделяется на 2^ν равные части $\left[\frac{x-1}{2^k}\pi+\frac{j-1}{2^{k+\nu}}\pi, \frac{x-1}{2^k}\pi+ +\frac{j}{2^{k+\nu}}\pi\right]$, $j=1, 2, \ldots, 2^\nu$ и полагается

$$\varphi(x)=\sum_{j=1}^{2^\nu}\lambda_n(x-\gamma_{k,\nu}^{x,j}),$$

где

$$\gamma_{k,\nu}^{x,j}=\frac{x-1}{2^k}\pi+\frac{j-\frac{1}{2}}{2^{k+\nu}}\pi \quad \text{и} \quad h=\frac{\pi}{2^{k+\nu+m}},$$

$$f(x)=\begin{cases} 2^m-1 & \text{на } \bigcup_{j=1}^{2^\nu}[\gamma_{k,\nu}^{x,j}-5h, \gamma_{k,\nu}^{x,j}-4h] \\ -1 & \text{на } \left[\frac{x-1}{2^k}\pi, \frac{x}{2^k}\pi\right]\setminus\left(\bigcup_{j=1}^{2^\nu}[\gamma_{k,\nu}^{x,j}-5h, \gamma_{k,\nu}^{x,j}-4h]\right) \\ 0 & \text{вне } \left[\frac{x-1}{2^k}\pi, \frac{x}{2^k}\pi\right] \end{cases}$$

Основную роль в доказательстве теорем играет следующая

Лемма 1. *Пусть* $2<p<\infty$, N *и* ε — *любые положительные числа. Тогда существует некоторая константа C такая, что при достаточно больших* ν *имеют место следующие неравенства:*

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat f(x)|^p dx\le C2^{(1-p)k+m}$;

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat\varphi(x)|^q dx\le C2^{(k+m)/(1-p)}$;

3) $|\hat f(x)|<\varepsilon$, $|\hat\varphi(x)|<\varepsilon$ при $|x|\le N$.

Применяя лемму 1, мы строим множества E_j, G_j, функции $f_j(x)$, $\varphi_j(x)$ и числа n_j, k_j, m_j, которые удовлетворяют нижеперечисленным свойствам:

1) $E_1\supset E_2\supset\ldots\supset E_j\supset\ldots$ и каждое E_j является объединением конечного числа интервалов вида $\left(\frac{x}{2^k}\pi, \frac{x+3}{2^k}\pi\right)$. Если $\left(\frac{x}{2^k}\pi, \frac{x+3}{2^k}\pi\right)$ — составляющий интервал множества G_j, $j\ge 2$, то $\left(\frac{x+1}{2^k}\pi, \frac{x+2}{2^k}\pi\right)$ — составляющий интервал множества G_j и наоборот;

2) $\varphi_j(x)=1$ на E_j и $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat\varphi_j(x)||x|dx<+\infty$, $j\ge 2$;

3) $\sum_{\alpha=1}^{j} f_\alpha(x)=2^{\sum_{\alpha=2}^{j} m_\alpha}$ на G_j и $\sum_{\alpha=1}^{j} f_\alpha(x)=0$ на $[-\pi,\pi]\setminus G_j$,

причем $\mu(G_j)=2\pi 2^{-\sum_{\alpha=2}^{j} m_\alpha}$;

4) $\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}_j(x)|^{q_j} dx < C2^{\frac{m_j+k_j}{1-p_j}}$, где q_j сопряженная к $p_j=p-$ $-\frac{p-r}{j}$;

5) $f_1(x)=1$ и для $j\geqslant 2$ $\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}_j(x)|^p dx < C2^{m_j-k_j(p-2)+(p-1)\sum_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha}$;

6) $\int_{|x|<n_{j-1}} |\widehat{f}_j(x)|^p dx < 2^{-j}$;

7) $\int_{|x|>n_j} \left|\sum_{\alpha=1}^{j} \widehat{f}_\alpha(x)\right|^p dx < 2^{-j}$;

8) $\left(p-\frac{p-2}{j}-2\right)k_j+\left(1-p+\frac{p-2}{j}\right)\left(\sum_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha-1\right)<m_j$;

9) $m_j<-j+k_j(p-2)-(p-1)\sum_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha$.

После этого доказывается, что в случае $2<p<\infty$ множество $E=\bigcap E_i$ удовлетворяет требованиям теоремы 1.

Для доказательства утверждения теоремы 1 при $p=\infty$ строятся множества E_j, G_j, функции $f_j(x)$, $\varphi_j(x)$ числа n_j, k_j, m_j, удовлетворяет требованиям теоремы 1.

8′) $m_j<k_j-\sum_{\alpha=1}^{j-1} m_\alpha$;

9′) $2(j-1)+2\left(1-\frac{1}{j}\right)\sum_{\alpha=1}^{j-1} m_\alpha+k_j\left(1-\frac{2}{j}\right)<m_j$.

При доказательстве теоремы 2, в случае $2<p<\infty$, строим множества E_j, G_j, функции $f_j(x)$, $\varphi_j(x)$ и числа n_j, k_j, m_j, удовлетворяющие условиям 1)—7) и неравенствам

8″) $m_j<k_j\left(p-2+\frac{p-2}{j}\right)+\left(\sum_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha\right)\left(1-p-\frac{p-2}{j}\right)$;

9″) $(p-2)k_j+j(p-1)+(1-p)\sum_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha<m_j$.

Для доказательст а теоремы 2, в случае $p=2$, строятся множества E_j, G_j, функции $f_j(x)$, $\varphi_j(x)$ и числа n_j, k_j, m_j, удовлетворяющие условиям 1)—7), и требуется, чтобы

$$8''')\qquad 2<m_j;$$

$$9''')\qquad m_j<\frac{k_j}{j}+\left(\sum_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha\right)\left(1+\frac{1}{j}\right)-j.$$

Заметим, что в случае $p=\infty$ теорему 1 можно сформулировать следующим образом.

Теорема 3. *Среди M-множеств тригонометрических интегралов существует такое множество E, что не эквивалентная нулю функция, тригонометрический интеграл которой сходится к нулю вне E, не может принадлежать ни к какому классу $L_p(R)$, $p>0$.*

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

ԱՆ. Ա ԹԱԼԱԼՅԱՆ

Եռանկյունաչափական ինտեգրալների U_p^* բազմությունների դասակարգման մասին

Հոդվածում ուսումնասիրվում են այն զրո չափի բազմությունները, որոնցից դուրս եռանկյունաչափական ինտեգրալների զրոյի զուգամիտումից բխում է ինտեգրալի նույնաբար զրո լինելը կախված այդ ինտեգրալի մեջ մասնակցող ֆունկցիայի ինտեգրելիության աստիճանից։ Ստացված են վերջնական արդյունքներ, որոնք հանդիսանում են (1) աշխատանքում ստացված արդյունքների տարածումը $p\geqslant 2$ դեպքում։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г. Г. Геворкян*, Сибирский мат. журн., т. 26, № 5 (1985). [2] *Г. Г. Геворкян*. Изв. АН АрмССР, т. 20, № 5 (1985). [3] *Г. Г. Геворкян*. Изв. АН АрмССР, Математика, т. 18, № 6, с. 448—475 (1983). [4] *C. Cecchini, A. Figa-Talamanca*. Pacific J. Math., v. 51, p. 37—47 (1974). [5] *A. Figa-Talamanca, G. I. Gaudry*, Michigan Math. J., v. 17, p. 179—191 (1970). [6] *I. I. Hirscman, Y. Katznelson*, Israel J. Math, v. 3, p. 221—231 (1965). [7] *A. M. Mantero*, Pacific J. Math., v. 63, p. 467—480, (1976).