ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Том 89 1989 № 3

УДК 517.95

МАТЕМАТИКА

П. С. Аветисян

Об оценках функции Грина одного резольвентного уравнения

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракеляном 12/VI 1989)

Рассматривается вопрос о разрешимости уравнения

$$\lambda U(x)+P(x, D)U(x)=f(x) \tag{1}$$

во всем евклидовом пространстве R_n. Здесь $P(x, D)$ равномерно квазиэллиптический оператор с коэффициентами, удовлетворяющими анизотропному условию Гельдера, λ—комплексный параметр, f принадлежит определенному анизотропному пространству Гельдера.

В настоящей заметке построена функция Грина (фундаментальное решение) уравнения (1) по классическому методу Леви [1,2] и установлены поточечные оценки этой функции и ее производных по пространственной переменной $x\in R_n$.

Эти оценки позволяют получить разрешимость уравнения (1) в классе функций $C^m(R)$ при достаточно больших $|\lambda|$.

Отметим, что построение и описание свойств функции Грина (фундаментального решения) уравнения (1) в случае, когда $P(x, D)$ равномерно эллиптический оператор произвольного порядка с коэффициентами, удовлетворяющими обычному условию Гельдера, проводились ранее в работе [3].

Отметим также работы [4,5], где изучалось уравнение (1) с постоянными коэффициентами.

Пусть R_n—n-мерное евклидово пространство точек $x=(x_1, \ldots, x_n)$; N_n^+—пространство мультииндексов, т. е. векторов $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ с целыми неотрицательными координатами. Пусть $m=(m_1, \ldots, m_n)$—вектор с натуральными компонентами, $\mu=(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, где $\mu_j=\frac{1}{m_j}$ $(j=1, \ldots, n)$. Если $\xi\in R_n$, $\alpha\in N_n^+$, то положим $\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\ldots\xi_n^{\alpha_n}$, $\|\xi\|_\mu=\sum_{j=1}^n|\xi_j|^{\frac{1}{\mu_j}}$, $(\mu, \alpha)=\sum_{j=1}^n\mu_j\alpha_j$, $D^\alpha=D_x^\alpha=D_1^{\alpha_1}\ldots D_n^{\alpha_n}$, где $D_j=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$ $(j=1, \ldots, n)$.

Определим необходимые для дальнейшего функциональные классы.

Обозначим через $C^m(R_n)$ пространство функций V на R_n, имеющих непрерывные ограниченные производные $D^\alpha V$, $(\mu, \alpha)\leqslant 1$, с нормой

$$\|V\|_{C^m}=\sum_{(\mu,\alpha)\leqslant 1}\sup_{x\in R_n}|D^\alpha V(x)|. \tag{2}$$

Пусть $0<\varepsilon<1$ такое, что $0<\varepsilon \max\limits_j m_j<1$.

Определим $C^{\varepsilon\cdot m}(R_n)$ как пространство всех непрерывных ограниченных функций V на R_n, для которых

$$\|V\|_{C^{\varepsilon m}}=\sup_{x\in R_n}|V(x)|+\sup_{\substack{x\neq y\\ x,y\in R_n}}\frac{|V(x)-V(y)|}{\|x-y\|_\mu^\varepsilon}<\infty. \tag{3}$$

Пусть $P(x, D)=\sum\limits_{(\mu,\alpha)=1} a_\alpha(x)D^\alpha$ линейный дифференциальный оператор с действительными коэффициентами $a_\alpha\in C^{\varepsilon m}(R_n)$, $(\mu, \alpha)\leqslant 1$ и $P(x, \xi)=\sum\limits_{(\mu,\alpha)=1} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ отвечающий ему характеристический многочлен, относительно которого предполагаем, что он является равномерно квазиэллиптическим, т. е. существует число $\delta>0$ такое, что при всех $\xi\in R_n$, $x\in R_n$

$$\delta|\xi|_\mu\leqslant\sum_{(\mu,\alpha)=1} a_\alpha(x)\xi^\alpha\leqslant\delta^{-1}|\xi|_\mu. \tag{4}$$

Сформулируем основной результат заметки.

Теорема. *Пусть* $\varphi_0\in(0, \pi)$, λ_0—*достаточно большое положительное число,* $\lambda=|\lambda|\exp(i\arg\lambda)$, $|\arg\lambda|\leqslant\pi-\varphi_0$, $|\lambda|\geqslant\lambda_0$, $\eta\in(0, \varepsilon]$.

Тогда для любой функции $f\in C^{\eta m}(R_n)$ *уравнение* (1) *имеет решение* $U\in C^m(R_n)$, *задаваемое формулой*

$$U(x;\lambda)=\int K(x, y;\lambda)f(y)dy, \tag{5}$$

где $K(x, y;\lambda)$—*функция Грина (фундаментальное решение) уравнения* (1) *со следующими свойствами:*

1°. *Функция* $K(x, y;\lambda)$ *определена и непрерывна по совокупности переменных при* $x\neq y$ *вместе со своими производными*

$$D_x^\alpha K(x, y;\lambda),\quad (\mu, \alpha)\leqslant 1.$$

2°. $[\lambda I+P(x, D)]K(x, y;\lambda)=0$ *при* $x\neq y$.

3°. *Пусть* $\varkappa=\sum\limits_{j=1}^n\frac{1+\alpha_j}{m_j}-1$, $\alpha\in N_n^+$, $(\mu, \alpha)\leqslant 1$, *тогда*

$$|D_x^\alpha K(x, y;\lambda)|\leqslant\begin{cases}Me^{-d\left(\sum\limits_{j=1}^n|\lambda|^{1/m_j}|x_j-y_j|\right)}\cdot|\lambda|^{\sum\limits_{j=1}^n\frac{1+\alpha_j}{m_j}-1}(\varkappa<0),\\ Me^{-d\left(\sum\limits_{j=1}^n|\lambda|^{1/m_j}|x_j-y_j|\right)}\cdot\left(1+\left|\ln\left(\sum\limits_{j=1}^n|\lambda|^{\frac{1}{m_j}}|x_j-y_j|\right)\right|\right)\ (\varkappa=0),\\ Me^{-d\left(\sum\limits_{j=1}^n|\lambda|^{1/m_j}|x_j-y_j|\right)}\cdot\|x-y\|_\mu^{1-\sum\limits_{j=1}^n\frac{1+\alpha_j}{m_j}}(\varkappa>0),\end{cases}$$

где $M=M(\varphi_0, \lambda_0, \alpha, n, m)$, $d=d(\varphi_0, \lambda_0, \alpha, n, m)$—*положительные константы.*

Доказательство этой теоремы проводится модификацией методов, разработанных в ([3,6]) с использованием свойств функции Грина (фундаментального решения) уравнения (1) с постоянными коэффициентами ([5]).

Ереванский государственный
университет

Պ. Ս. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

Մի ռեզոլվենտային հավասարման Գրինի ֆունկցիայի գնահատականների մասին

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է հետևյալ ռեզոլվենտային հավասարումը՝

$$\lambda U(x) + P(x, D)U(x) = f(x), \tag{1}$$

$P(x, D)$-ն հավասարաչափ էլիպտիկ օպերատոր է, λ-ն կոմպլեքս պարամետր է, f ֆունկցիան որոշակի անիզոտրոպ Գյոլդերի տարածությունից է։

Այս հավասարման համար, Լևիի դասական մեթոդով կառուցված է Գրինի ֆունկցիան։ Ստացված են գնահատականներ ինչպես այդ ֆունկցիայի, այնպես էլ նրանց ածանցյալների համար, որոնք թույլ են տալիս բավականաչափ մեծ $|\lambda|$-ների համար $C^m(R^n)$ տարածությունում պարզել (1) հավասարման լուծելիության հարցը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Е. Е. Леви*, УМН, вып. 8, с. 249—292 (1940). [2] *К. Миранда*, Уравнения с частными производными эллиптического типа, ИЛ, М., 1957. [3] *Е. П. Соболевский*, рукопись деп. в ВИНИТИ, № 3385—85 ДЕП. 1985. *Е. П. Соболевский*, рукоп. деп. в ВИНИТИ, № 3386—85 ДЕП, 1985. [5] *П. С. Аветисян*, Математика. Межвузовский сб. науч. трудов, Изд. ЕГУ, вып. 6, с. 5—16 (1988). [5] *А. Фридман*, Уравнения с частными производными параболического типа, М., Мир, 1968.