ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Том 89 1989 №3

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

Э. А. Даниелян, Г. С. Мовсисян

Уточнение теоремы Каратеодори—Рисса

(Представлено академиком АН Армянской ССР Р. В. Амбарцумяном 16/V 1989)

При изучении связанных с обобщенной конечной проблемой моментов экстремальных задач на классе всех функций распределения (ФР) $\mathcal{F}_0$ на $[a, b]^*$ $(-\infty<a<b<+\infty)$ важную роль играет теорема Рисса (см. [1]), с. 30), утверждающая, что
для любой системы непрерывных функций

$$u_1(t),\ u_2(t),\ \ldots,\ u_n(t),\ n\geqslant 1,\ t\in[a, b]$$

моментное пространство

$$M(\mathcal{F}_0)\overset{\text{def}}{=}\left\{c=(c_1,\ \ldots,\ c_n):\ \int_a^b u_k(t)d\sigma(t)=c_k,\ k=\overline{1,\ n}\ \ \sigma\in\mathcal{F}_0\right\}$$

совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой множества точек кривой

$$U=\{u(t)=(u_1(t),\ \ldots,\ u_n(t):\ t\in[a, b]\}\subset R^n.$$

Классическая теорема Каратеодори (см., например [2], с. 169) занимает центральное место в выпуклом анализе. Она дает представление точек выпуклого множества в R_n в виде выпуклой комбинации не более чем $n+1$ крайних точек данного выпуклого множества.

Объединение вышеупомянутых двух утверждений приводит для класса $\mathcal{F}_0$ к следующему утверждению, называемому в [1], с. 31, теоремой Каратеодори—Рисса.

1) *Каждая точка* $c\in M(\mathcal{F}_0)$ *представима в виде*

$$c=\lambda_1 u(t_1)+\ \ldots\ +\lambda_n u(t_n)+\lambda_{n+1}u(t_{n+1}),$$

где $t_i\in[a, b]$, $\lambda_i\geqslant 0$, $(i=\overline{1,\ n+1})$, $\sum\limits_{i=1}^{n+1}\lambda_i=1$.

2) *Если* $c\in\partial M(\mathcal{F}_0)$, *то*

$$c=\lambda_1 u(t_1)+\ \ldots\ +\lambda_n u(t_n),$$

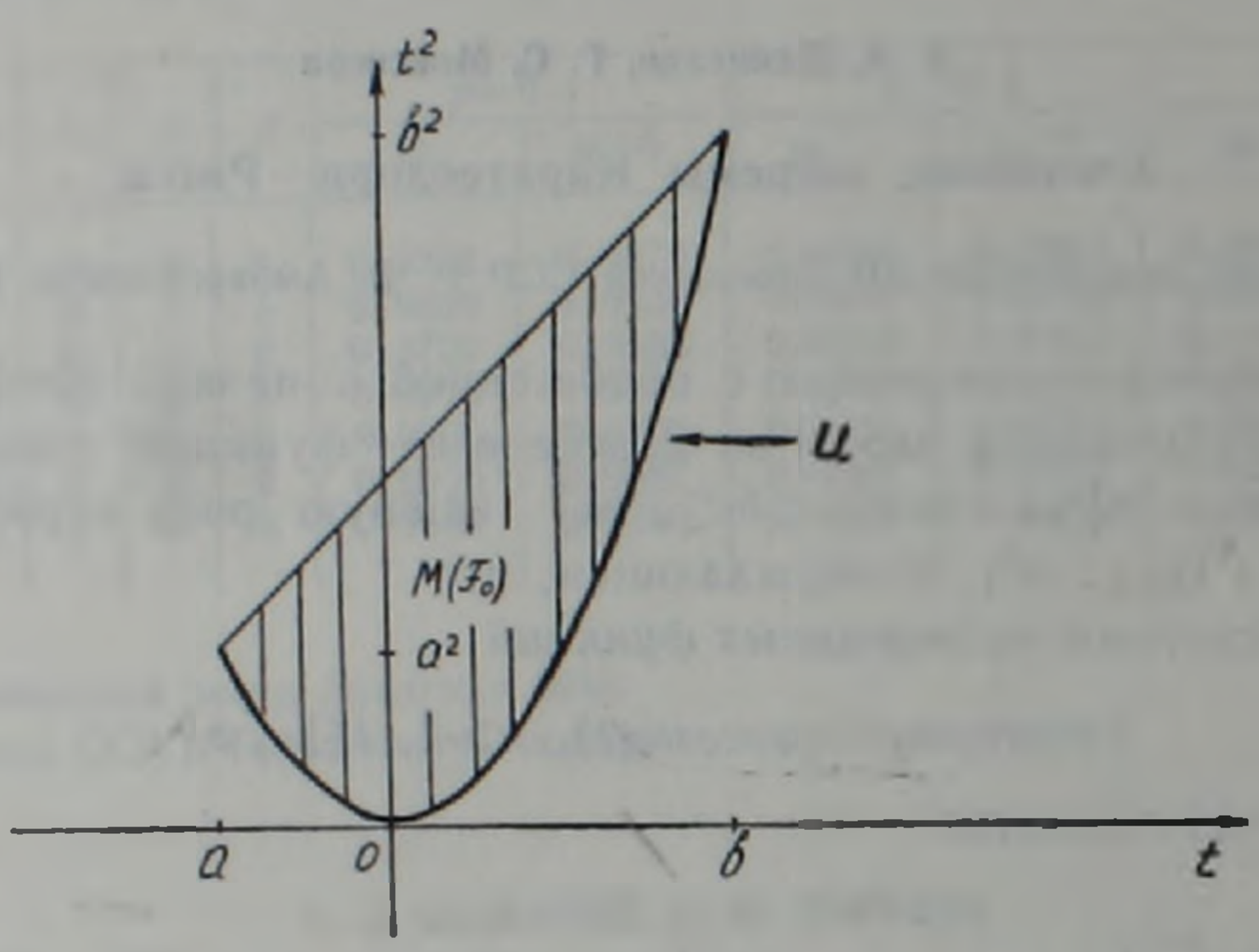
где $t_i\in[a, b]$, $\lambda_i\geqslant 0$, $(i=\overline{1,\ n})$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$.

Во многих вопросах выпуклого анализа важно иметь выпуклое

* ФР σ на $[a, b]$ —неубывающая, непрерывная слева функция, не имеющая точек роста вне $[a, b]$ и такая, что $\sigma(a)=0$, $\sigma(b+)=1$.

линейное представление $c \in M(\mathcal{F}_0)$ через возможно меньшее число точек кривой u.

Во всех примерах удается построить представление для c через не более чем n точек кривой u. Рассмотрим простейший пример. Пусть $n=2$, $u_1(t)=t$, $u_2(t)=t^2$. Тогда моментным пространством согласно теореме Рисса будет замкнутая выпуклая оболочка кривой $u(t)=\{(t, t^2): t \in [a, b]\} \subset R^2$ (рисунок).



Из рисунка видно, что каждая точка $c \in \operatorname{int} M(\mathcal{F}_0)$ может быть представлена в виде выпуклой комбинации ровно двух точек кривой U.

Цель настоящей заметки—доказать следующую теорему.

Теорема. *Каждая точка $c \in M(\mathcal{F}_0)$ представима в виде*

$$c=\lambda_1 u(t_1)+ \ldots +\lambda_n u(t_n),$$

где $t_i \in [a, b]$, $\lambda_i \geqslant 0$, $(i=\overline{1, n})$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Отметим, что утверждение теоремы не может быть улучшено.

Замечание. Без ограничения общности можно считать, что $c=o$. В противном случае можно перейти к вектор-функции $u(t)-c$. Согласно теореме Каратеодори—Рисса имеем

$$o=\lambda_1 u(t_1)+ \ldots +\lambda_n u(t_n)+\lambda_{n+1} u(t_{n+1}). \qquad (1)$$

Доказательству теоремы предпошлем доказательство двух лемм. Обозначим через S выпуклую оболочку множества $\{u(t_i)\}_{i=1}^{n+1} \subset R^n$, а через K наименьший выпуклый конус, содержащий точки $-u(t_1), \ldots, -u(t_n)$. Очевидно, что K замкнутый конус.

Лемма 1. *Пусть точки $u(t_1), \ldots, u(t_n), u(t_{n+1})$ не лежат в одной гиперплоскости в R^n и $o \in \operatorname{int} S$. Тогда*

1) $u(t_i) \in K$, $(i=\overline{1, n})$;

2) $u(t_{n+1}) \in K$.

Доказательство 1). Рассмотрим гиперплоскость $(a, x)=h$,

проходящую через точки $u(t_1), \ldots, u(t_n)$. Допустим, что эта гиперплоскость проходит через точку o, т. е. $h=0$. Пусть $(a, u(t_{n+1}))>0$, тогда $(a, x)\geqslant 0$ для всех $x\in S$, т. е. гиперплоскость является опорной к S, что противоречит условию $o\in \mathrm{Int}S$ ([1], с. 20). Таким образом $h\neq 0$. Рассмотрим параллельную гиперплоскости $(a, x)=h$ гиперплоскость $(a, x)=0$. Пусть $(a, u(t_i))>0$, $(i=\overline{1, n})$. Тогда $(a, x)<0$ для всех $x\in K$ и $u(t_i)\notin K$, $(i=\overline{1, n})$.

2) Допустим, что $u(t_{n+1})\in K$. Проведем гиперплоскость $(b, x)=0$, отделяющую конус K от точки $u(t_{n+1})$ ([1], с. 25) Пусть $(b, u(t_{n+1}))>0$ и $(b, x)<0$ для всех $x\in K$. В частности $(b, u(t_i))\geqslant 0$, $(i=\overline{1, n})$. Тогда $(b, x)\geqslant 0$ для всех $x\in S$, что противоречит условию $o\in \mathrm{Int}S$. Лемма 1 доказана.

Как известно ([2], с. 31), каждая точка $x\in K$ представляется в виде

$$x=-\mu_1 u(t_1)- \ldots -\mu_n u(t_n), \qquad (2)$$

где $\mu_i\geqslant 0$, $(i=\overline{1, n})$.

Лемма 2. *Пусть точки* $u(t_1), \ldots, u(t_n), u(t_{n+1})$ *не лежат в одной гиперплоскости,* $o\in \mathrm{Int}S$ *и в представлении* (2) *все* $\mu_i>0$, $(i=\overline{1, n})$. *Тогда точка* $x\in \mathrm{Int}K$.

Доказательство. Допустим противное — пусть $x\in \partial K$. Проведем через x гиперплоскость $(d, x)=0$, опорную к K ([1], с. 25). Тогда $-\mu_1(d, u(t_2))- \ldots -\mu_n(d, u(t_n))=0$. Так как все $\mu_i>0$, то $(d, u(t_i))=0$, $(i=\overline{1, n})$ и точки $u(t_1), \ldots, u(t_n)$ лежат в гиперплоскости, проходящей через точку o, что противоречит условию $o\in \mathrm{Int}S$. Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы. Пусть точки $u(t_1), \ldots, u(t_n), u(t_{n+1})$ лежат в одной гиперплоскости. Тогда множество S лежит в некотором подпространстве пространства R^n размерности не более $n-1$. В этом случае утверждение теоремы является прямым следствием классической теоремы Каратеодори.

Рассмотрим теперь тот случай, когда точки $u(t_1), \ldots, u(t_n), u(t_{n+1})$ не лежат в одной гиперплоскости. Тогда S является телом в R^n ([1]), с. 18). Если точка $o\in \partial S$ и так как S замкнутое множество, то утверждение теоремы следует из теоремы Каратеодори для замкнутых выпуклых множеств (см. например ([1]), с. 21).

Остается тот случай, когда $o\in \mathrm{Int}S$. Рассмотрим точки $u(t_1)$ и $u(t_{n+1})$. По лемме 1 $u(t_1)\in K$, $u(t_{n+1})\in K$. Так как эти точки лежат на непрерывной кривой U, то найдется точка $t'\in[a, b]$ такая, что $u(t')\in \partial K$. Тогда

$$u(t')=-\mu_1 u(t_1)- \ldots -\mu_n u(t_n),$$

где $\mu_i\geqslant 0$, $(i=\overline{1, n})$. Но по лемме 2 хотя бы один из μ_i, $(i=\overline{1, n})$ равен нулю. Пусть для определенности $\mu_n=0$. Таким образом

$$u(t')+\mu_1 u(t_1)+ \ldots +\mu_{n-1}u(t_{n-1})=o,$$

т. е.

$$o=\lambda_1 u(t_1)+ \ldots +\lambda_{n-1}u(t_{n-1})+\lambda_n u(t'),$$

где $\lambda_i = \frac{\mu_i}{1 + \sum_{j=1}^{n-1} \mu_j}$, $(i = \overline{1, n-1})$, $\lambda_n = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{n-1} \mu_j}$, $\lambda_k \geqslant 0$, $(k = \overline{1, n})$,

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1.$$

Теорема доказана

В заключение приведем другую формулировку доказанной нами теоремы.

Теорема*. *Если $c_1, \ldots, c_n$—обобщенные моменты некоторой ФР на $[a, b]$, то существует ступенчатая ФР на $[a, b]$ с не более чем n скачками, имеющая те же моменты.*

Ереванский государственный
университет

Է. Ա. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ, Գ. Ս. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Կարաթեոդորի—Ռիսի թեորեմի ճշգրտումը

Ներկայ $\mathcal{F}_0$-ն $[a, b]$ հատվածի վրա բոլոր բաշխման ֆունկցիաների դասն է, իսկ

$$u_1(t), \ldots, u_n(t), \quad n \geqslant 1, \quad t \in [a, b]$$

անընդհատ ֆունկցիաների համակարգ է։

$$c_i = \int_a^b u_i(t)\, d\sigma(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad \sigma \in \mathcal{F}_0$$

ինտեգրալները կոչվում են $\sigma(t)$ բաշխման ֆունկցիայի ընդհանրացված մոմենտներ։

Աշխատանքում ապացուցված է հետևյալ թեորեմը։

Թեորեմ. Եթե $c_1, \ldots, c_n$-ը $[a, b]$ հատվածի վրա ինչ որ բաշխման ֆունկցիայի ընդհանրացված մոմենտներն են, ապա գոյություն ունի ոչ ավելի քան n թռիչքներով թռիչքաձև բաշխման ֆունկցիա $[a, b]$ հատվածի վրա նույն ընդհանրացված մոմենտներով։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. Г. Крейн, А. А. Нудельман,* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи, Наука, М., 1973. [2] *Р. Рокафеллар,* Выпуклый анализ, Мир, М., 1973.