ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Том 89 1989 № 2

УДК 539.374

МЕХАНИКА

Р. М. Киракосян

К проектированию ортотропных равнопрочных пластинок

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 20/III 1989)

Вопросам построения различных теорий и решения конкретных задач многослойных оболочек и пластин переменной жесткости посвящена работа ([1]). Там и приведена обширная литература родственных публикаций. В настоящей статье предлагается способ освобождения от «нулевых толщин» в проектах ортотропных равнопрочных пластинок, прочностные свойства которых в поперечном направлении значительно уступают свойствам в продольных направлениях. Считается, что физико-геометрические параметры пластинки таковы, что в рамках допустимой точности применима классическая теория поперечного изгиба пластинок ([2]). Пользуясь этим допущением и поверхностными условиями, из дифференциальных уравнений равновесия сплошной среды в декартовых и цилиндрических координатах получаются выражения поперечных напряжений, которые учитываются при составлении условия равнопрочности. Показывается, что функционал прочности свое наибольшее значение может принимать или на срединной плоскости, или на внешних поверхностях пластинки.

1. Пусть пластинка переменной толщины h отнесена к системе декартовых координат x, y, z. Внешние нормали поверхностей пластинки $z=-\frac{h}{2}$ и $z=\frac{h}{2}$ соответственно обозначим через ν^- и ν^+. Направляющие косинусы этих нормалей определяются формулами ([3])

$$l^-=\cos(\nu^-\hat{}, x)=l^+=\cos(\nu^+\hat{}, x)=-\frac{\partial h}{\partial x}\left|4+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right|^{-1/2},$$

$$m^-=\cos(\nu^-\hat{}, y)=m^+=\cos(\nu^+\hat{}, y)=-\frac{\partial h}{\partial y}\left|4+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right|^{-1/2} \tag{1.1}$$

$$n^-=\cos(\nu^-\hat{}, z)=-n^+=-\cos(\nu^+\hat{}, z)=-2\left|4+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right|^{-1/2}.$$

В рамках классической теории поперечного изгиба основные напряжения σ_x, σ_y и τ_{xy} выражаются через прогиб пластинки w с помощью известных формул

$$\sigma_x=-z\left(B_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \quad \sigma_y=-z\left(B_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),$$

$$\tau_{xy} = -2zB_{66}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \tag{1.2}$$

где B_{ij}—упругие характеристики материала.

При отсутствии объемных сил система дифференциальных уравнений равновесия сплошной среды имеет вид [2]

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0.$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0.$$

Рассмотрим случай, когда на пластинку действуют только вертикальные нагрузки Z^- и Z^+. Поверхностные условия в этом случае примут вид

$$\sigma_x^{\mp} l^{\mp} + \tau_{xy}^{\mp} m^{\mp} + \tau_{xz}^{\mp} n^{\mp} = 0,$$

$$\tau_{xy}^{\mp} l^{\mp} + \sigma_y^{\mp} m^{\mp} + \tau_{yz}^{\mp} n^{\mp} = 0, \tag{1.4}$$

$$\tau_{xz}^{\mp} l^{\mp} + \tau_{yz}^{\mp} m^{\mp} + \sigma_z^{\mp} n^{\mp} = 2Z^{\mp} \left| 4 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 \right|^{-1/2}.$$

Интегрируя первые два уравнения системы (1.3) по z и имея в виду (1.2), с учетом (1.1) и поверхностных условий (1.4), для поперечных касательных напряжений пластинки получим

$$\tau_{xz} = -\frac{1}{8}\left\{(h^2-4z^2)\left| B_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right| + \right.$$

$$\left. + 2h\left|\left(B_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\frac{\partial h}{\partial x} + 2B_{66}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\frac{\partial h}{\partial y}\right|\right\}, \tag{1.5}$$

$$\tau_{yz} = -\frac{1}{8}\left\{(h^2-4z^2)\left| B_{22}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right| + \right.$$

$$\left. + 2h\left|\left(B_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\frac{\partial h}{\partial y} + 2B_{66}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\right|\right\}.$$

Учитывая выражения моментов M_x, M_y и H [2], действующих на единицу длины срединной плоскости пластинки, можно формулы (1.5) привести к виду

$$\tau_{xz} = \frac{SN_x}{J} + \frac{h}{4J}\left(1-\frac{Sh}{J}\right)\left(M_x\frac{\partial h}{\partial x} + H\frac{\partial h}{\partial y}\right),$$

$$\tau_{yz} = \frac{SN_y}{J} + \frac{h}{4J}\left(1-\frac{Sh}{J}\right)\left(M_y\frac{\partial h}{\partial y} + H\frac{\partial h}{\partial x}\right), \tag{1.6}$$

где

$$S=\frac{1}{8}(h^2-4z^2),\quad J=\frac{h^3}{12}. \tag{1.7}$$

Интегрируя третье уравнение системы (1.3) по z и имея в виду (1.5), после удовлетворения последним поверхностным условиям (1.4) можно получить выражение нормального напряжения σ_z и дифференциальное уравнение равновесия пластинки. Как и следовало ожидать, это уравнение совпадает с известным уравнением ([1]), полученным традиционным способом теории пластинок, т. е. способом рассмотрения равновесия моментов дифференциального элемента срединной плоскости.

Имея выражения поперечных напряжений и поступая аналогично ([2]), можно в рамках классической теории изгиба итерационным методом существенно уточнить основное напряженное состояние пластинок переменной толщины.

Не претендуя на общность, в качестве условия прочности примем условие Мизесса—Хилла ([4]), которое при пренебрежении влиянием σ_z имеет вид

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_{xs}^2}-\left(\frac{1}{\sigma_{xs}^2}+\frac{1}{\sigma_{ys}^2}-\frac{1}{\sigma_{zs}^2}\right)\sigma_x\sigma_y+\frac{\sigma_y^2}{\sigma_{ys}^2}+\frac{\tau_{xy}^2}{\tau_{xys}^2}+\frac{\tau_{yz}^2}{\tau_{yzs}^2}+\frac{\tau_{zx}^2}{\tau_{zxs}^2}=1. \tag{1.8}$$

Здесь σ_{xs}, σ_{ys}, σ_{zs}—пределы текучести материала по направлениям x, y, z, а τ_{xys}, τ_{yzs}, τ_{zxs}—пределы текучести при чистом сдвиге в соответствующих плоскостях.

Подставляя выражения напряжений (1.2) и (1.5) в (1.8), получаем

$$B_1+B_2z^2+B_3z^4=1. \tag{1.9}$$

Коэффициенты B_1, B_2 и B_3 имеют громоздкие выражения. Имея в виду неотрицательность B_1 и B_3, нетрудно показать, что функционал прочности, т. е. левая часть равенства (1.9), свое наибольшее значение может принимать или на срединной плоскости $z=0$, или на внешних поверхностях пластинки $z=\mp h/2$. В случае пластинок, размеры которых в плане не так уж сильно отличаются друг от друга, предварительно можно считать, что функционал прочности свое наибольшее значение принимает на поверхностях $z=\mp h/2$. После решения задачи это допущение можно проверить, что в силу единственности правомерно.

2. Проделав выкладки, аналогичные выкладкам предыдущего пункта, для поперечных касательных напряжений цилиндрически ортотропной пластинки находим

$$\tau_{rz}=\frac{4z^2-h^2}{8}\left\{B_r\frac{\partial^3w}{\partial r^3}+B_{r\theta}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3w}{\partial r\partial\theta^2}+B_r\frac{1}{r}\frac{\partial^2w}{\partial r^2}-\right.$$

$$\left.-B_\theta\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial r}-(B_\theta+B_{r\theta})\frac{1}{r^3}\frac{\partial^2w}{\partial\theta^2}\right\}-\frac{h}{4}\left\{B_r\left[\frac{\partial^2w}{\partial r^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\nu_\theta\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2w}{\partial\theta^2}+\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right]\frac{\partial h}{\partial r}+\frac{2B_k}{r^2}\left(\frac{\partial^2w}{\partial r\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)\frac{\partial h}{\partial\theta}\right\},$$

Академия наук Армянской ССР
Фундаментальная библиотека

$$\tau_{\theta z}=\frac{4z^2-h^2}{8}\left(B_6\frac{1}{r^3}\frac{\partial^3 w}{\partial\theta^3}+B_{r6}\frac{1}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial r^2\partial\theta}+B_6\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 w'}{\partial r\partial\theta^2}\right)-\frac{h}{4}\Bigg|B_6\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+\nu_r\frac{\partial^2 w'}{\partial r^2}\right)\frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial\theta}+\frac{2B_k}{r}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial r\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial w'}{\partial\theta}\right)\frac{\partial h}{\partial r}\Bigg|. \qquad (2.1)$$

Здесь B_r, B_θ, ... — характеристики материала (²). Формулы касательных напряжений (2.1) можно привести к виду

$$\tau_{rz}=\frac{SN_r}{J}+\frac{h}{4J}\left(1-\frac{Sh}{J}\right)\left(M_r\frac{\partial h}{\partial r}+H_{r\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial\theta}\right),$$

$$\tau_{\theta z}=\frac{SN_\theta}{J}+\frac{h}{4J}\left(1-\frac{Sh}{J}\right)\left(M_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial\theta}+H_{r\theta}\frac{\partial h}{\partial r}\right), \qquad (2.2)$$

где N_r, N_θ и M_r, M_θ, $H_{r\theta}$ — поперечные силы и моменты пластинки.

Имея выражения поперечных напряжений (2.1), (2.2), можно аналогично предыдущему пункту поставить задачу проектирования равнопрочных пластин, изготовленных из современных материалов.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍՅԱՆ

Հավասարամուր օրթոտրոպ սալերի նախագծման մասին

Առաջարկվում է լայնական ուղղությամբ ամրության վատ հատկությամբ օժտված նյութերից պատրաստված հավասարաամուր սալերի նախագծերում «ըրոյական հաստություններից» աղատվելու եղանակ։ Օգտվելով փոփոխական հաստության սալերի մակերևույթային պայմաններից, ծռման դասական տեսության շրջանակներում արտածվում են լայնական շոշափող և նորմալ լարումների բանաձևերը, որոնք հաշվի են առնվում հավասարաամրության պայմանը կազմելիս։ Ցույց է տրվում, որ ամրության ֆունկցիոնալը իր ամենամեծ արժեքը կարող է ստանալ կամ սալի միջին, կամ էլ արտաքին մակերևույթների վրա։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко,* Теория оболочек переменной жесткости. Наукова думка, Киев, 1981. [2] *С. А. Амбарцумян.* Теория анизотропных пластин. Наука, М., 1987. [3] *П. К. Рашевский.* Курс дифференциальной геометрии, Гостехиздат, М., 1956. [4] *Н. Н. Малинин,* Прикладная теория пластичности и ползучести, Машиностроение, М., 1975.