ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Том 89 1989 №2

УДК 519.6

МАТЕМАТИКА

Л. А. Оганесян, Н. В. Оганесян

Проекционно-сеточный метод решения первой краевой задачи для полуэллиптического уравнения в криволинейной области

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. Б. Нерсесяном 20/III 1989)

В заметке рассматриваются вопросы разрешимости и сходимости проекционно-сеточной схемы задачи Дирихле для модельного полуэллиптического уравнения.

Полуэллиптические уравнения являются естественными обобщениями эллиптических уравнений и составляют подкласс гипоэллиптических уравнений, введенных Л. Хёрмандером (см., например, (1)).

В плоской выпуклой области $\Omega=\{0<x<1,\ \gamma_1(x)<y<\gamma_2(x),\ \gamma_1(x)<\gamma_2(x),\ \gamma_j(x)\in C^2[0,1],\ j=1,2\}$ рассматривается следующая краевая задача:

$$Lu=-u_{xx}+(ib_0u_x+a_0u_{yy})_{yy}+a_1u_{yyy}+a_2u_{yy}+$$
$$+a_3u_{xy}+a_4u_x+a_5u_y+a_6u=f, \tag{1}$$
$$u|_{\partial\Omega}=0,\ u_y(x,\gamma_1(x))=u_y(x,\gamma_2(x))=0, \tag{2}$$

где $f\in L_2(\Omega)$, $b_0=b_0(x,y)$, $a_k=a_k(x,y)$, $k=0,1,\ldots,6$, достаточно гладкие в Ω функции, причем a_0 и b_0—вещественнозначные функции, удовлетворяющие условиям: $a_0\geqslant k_0>0$, $a_0-b_0^2/4\geqslant m_0>0$.

Поставленная задача для эллиптических уравнений второго порядка достаточно хорошо изучена. Известно, например, что решения из $W_2^1(\Omega)$ задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка с достаточно гладкими коэффициентами на самом деле имеют большую гладкость—именно, принадлежат $W_2^2(\Omega)$ (см., например, (2)). Оказывается, что аналогичным свойством обладают и полуэллиптические уравнения.

Приведем некоторые определения и обозначения.

Пусть G—область из E_2, l_1, l_2—целые неотрицательные числа. Обозначим через $W_2^{(l_1,l_2)}(G)$ множество измеримых функций $\{g\}$ с конечной нормой (производные понимаются в обобщенном смысле)

$$\|g\|_{W_2^{(l_1,l_2)}(G)}=\left\|\frac{\partial^{l_1}g}{\partial x^{l_1}}\right\|_{L_2(G)}+\left\|\frac{\partial^{l_2}g}{\partial y^{l_2}}\right\|_{L_2(G)}+\|g\|_{L_2(G)}.$$

Через $\mathring{W}_2^{(l_1,l_2)}(G)$ обозначим пополнение множества $C_0^\infty(G)$ по этой норме.

Пусть $u, \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1,2)}(\Omega)$. Обозначим через $\mathcal{L}(u, \varphi)$ форму Дирихле, соответствующую оператору L уравнения (1), определяемую формулой

$$\mathcal{L}(u, \varphi) = \int\limits_{\Omega} [u_x\varphi_x + (ib_0u_x + a_0u_{yy})\varphi_{yy} - (a_1u_{yy} + a_3u_x)\varphi_y +$$

$$+ (-(a_1)_y u_{yy} + a_2u_{yy} - (a_3)_y u_x + a_4u_x + a_5u_y + a_6u)\varphi]d\Omega.$$

Исходным предположением на форму Дирихле у нас будет следующее условие полуэллиптичности: для всех $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1,2)}(\Omega)$

$$\operatorname{Re}\mathcal{L}(u, u) \geqslant \varkappa \|u\|^2_{W_2^{(1,2)}(\Omega)} \tag{3}$$

с постоянной $\varkappa > 0$, не зависящей от u.

Можно показать, что неравенство (3) имеет место, например, при достаточно большом $\operatorname{Re} a_6$ или достаточно малых $|a_k|$, $k = 1, \ldots, 5$. В частности, когда $a_k = 0$ $(k = 1, \ldots, 5)$, то оценка (3) верна при $\operatorname{Re} a_6 \geqslant 0$.

Функцию $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1,2)}(\Omega)$ назовем обобщенным решением задачи (1), (2), если выполняется интегральное тождество: для всех $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1,2)}(\Omega)$ $\mathcal{L}(u, \varphi) = (f, \varphi)$, где $(\cdot, \cdot)$—скалярное произведение в L_2.

Из аналога леммы Лакса—Мильграма (см. [3]) для полуэллиптических уравнений и неравенства (3) следует существование и единственность обобщенного решения задачи (1), (2).

Теорема 1. *Пусть оператор L является полуэллиптическим (удовлетворяет неравенству* (3)). *Тогда обобщенное решение задачи* (1), (2) *принадлежит* $W_2^{(2,4)}(\Omega)$.

Доказательство теоремы проводится по следующей схеме. Невырожденным преобразованием координат $x = \xi$, $y = \gamma_1(\xi) + (\gamma_2(\xi) - \gamma_1(\xi))\eta$ область Ω отображается на квадрат $\Pi = \{0 < \xi, \eta < 1\}$. Показывается, что при таком преобразовании полуэллиптическое уравнение переходит в полуэллиптическое. Таким образом, вопрос о принадлежности обобщенного решения задачи (1), (2) пространству $W_2^{(2,4)}(\Omega)$ сводится к доказательству соответствующего факта для квадрата Π вместо области Ω. А последний вопрос решается применением метода продолжения по параметру, использованного ранее в эллиптическом случае (см. [4]).

Остановимся теперь на предложении, указывающем скорость сходимости галеркинских приближений к обобщенному решению задачи (1), (2).

Зададим базисные функции метода Галеркина непосредственно для области Ω. Пусть $h > 0$. Выберем шаги h_x и h_y (h_x — шаг разбиения области Ω в направлении оси OX, h_y—в направлении оси OY) такими, что $h_x \sim h^2$, $h_y \sim h$. При этом область Ω разобьется на прямоугольники, криволинейные трапеции и криволинейные треугольники.

Поясним вкратце способ построения базисных функций.

Криволинейную трапецию отобразим на квадрат. В новых переменных построим базисные функции линейно-эрмитовой интерполяции (см. ([5]), затем совершим обратное преобразование для получения базисных функций в исходных переменных

В криволинейных треугольниках поступим следующим образом. Пусть вершина треугольника при прямом угле совпадает с узлом $(x_i,\ y_i)$. Сопоставим ей следующие две базисные функции:

$$\varphi_{ij}^{(1)}(x,\ y)=\left(\frac{y-\gamma(x)}{\delta}\right)^2\cdot\left(2\,\frac{y-y_j}{\delta}+1\right),$$

$$\varphi_{ij}^{(2)}(x,\ y)=\left(\frac{y-\gamma(x)}{\delta}\right)^2\,(y-y_j),$$

где $\delta=\gamma(x_i)-y_j=O(h^2)$, $y=\gamma(x)$ — уравнение соответствующей криволинейной стороны треугольника.

В прямоугольниках, не прилегающих к треугольникам, берем базисные функции линейно-эрмитовой интерполяции. Что же касается прямоугольников, непосредственно прилегающих к треугольникам, то базисные функции строим так, чтобы обеспечивалась «стыковка» с базисными функциями линейно-эрмитовой интерполяции, а также с базисными функциями в треугольниках.

Построенные таким образом базисные функции принадлежат $\mathring{W}_2^{(1,2)}(\Omega)$

Теорема 2. *Пусть* $v_h\in\mathring{W}_2^{(1,2)}(\Omega)$ — *приближенное решение по методу Галеркина задачи* (1), (2) *(соответствующее шагу* h), $u\in$ $\in W_2^{(4,2)}(\Omega)$ *(см. теорему* 1) — *обобщенное решение этой задачи. Тогда*

$$\|u-v_h\|_{W_2^{(1,2)}(\Omega)}\leqslant c\|u\|_{W_2^{(2,4)}(\Omega)}$$

где $c>0$ — *постоянная, не зависящая от шага* h.

Институт озероведения Академии наук СССР
Ереванский государственный университет

Լ. Հ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ, Ն. Վ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

Կիսաէլիպտիկ հավասարման համար առաջին եզրային խնդրի լուծումը պրոյեկցիոն-ցանցային եղանակով կորագիծ տիրույթում

Աշխատանքում դիտարկվում է մոդելային կիսաէլիպտիկ հավասարման համար Դիրիխլեի խնդիրը որոշակի տիպի կորագիծ Ω *տիրույթում: Ապացուցվում է այդ խնդրի լուծման գոյությունը և միակությունը* $W_2^{(2,4)}(\Omega)$ *տա-*

բաժությունում։ Խնդրի մոտավոր լուծումը գտնելու համար կառուցվում է պրոյեկցիոն-ցանցային սխեմա, որի համար տեղի ունի զուգամիտության $O(h^2)$ կարգի գնահատական։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. Хёрмандер*, Анализ линейных дифференциальных операторов, т. 2, Мир, М., 1987. [2] *О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева*, Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, Наука, М., 1973. [3] *Ф. Сьярле*, Метод конечных элементов для эллиптических задач, Мир, М., 1980. [4] *О. А. Ладыженская*, Вестник ЛГУ, № 11, 1955. [5] *Н. В. Оганесян*, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 24, № 3 (1989).