ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Том 89 1989 №2

УДК 519.71

МАТЕМАТИКА

Б. Е. Торосян

О сложности полиномиального отделения подмножеств в конечных множествах

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 2/III 1989)

Формированию наших основных идей способствовала большая серия исследований советских и зарубежных математиков по сложностям реализаций функций k-значной логики ([1]) и аналогичным вопросам дискретной математики, часть которой представлена в работах ([2-8]). Работа продолжает развивать положения исследований ([9-13]) и опирается на их результаты.

Рассматриваются непустые конечные множества точек n-мерного евклидова пространства R^n и задачи, связанные с оценками сложностей отделения подмножеств в заданном множестве $A\subseteq R^n$ значениями определенных в A вещественнозначных функций из некоторого класса $\{F(x_1, ..., x_n)\}\equiv\{F(\tilde{x})\}\equiv\{F\}$.

1. Рассмотрим системы неравенств

$$1)\ \begin{cases} F(\tilde{x})\geqslant 0, & \text{при } \tilde{x}\in A_0\\ F(\tilde{x})<0, & \text{при } \tilde{x}\in A\setminus A_0;\end{cases}\qquad 2)\ \begin{cases} F(\tilde{x})>0, & \text{при } \tilde{x}\in A_0\\ F(\tilde{x})\leqslant 0, & \text{при } \tilde{x}\in A\setminus A_0;\end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} F(\tilde{x})\leqslant 0, & \text{при } \tilde{x}\in A_0\\ F(\tilde{x})>0, & \text{при } \tilde{x}\in A\setminus A_0;\end{cases}\qquad 4)\ \begin{cases} F(\tilde{x})<0, & \text{при } \tilde{x}\in A_0\\ F(\tilde{x})\geqslant 0, & \text{при } \tilde{x}\in A\setminus A_0;\end{cases}$$

$$5)\ \begin{cases} F(\tilde{x})>0, & \text{при } \tilde{x}\in A_0\\ F(\tilde{x})<0, & \text{при } \tilde{x}\in A\setminus A_0;\end{cases}\qquad 6)\ \begin{cases} F(\tilde{x})<0, & \text{при } \tilde{x}\in A_0\\ F(\tilde{x})>0, & \text{при } \tilde{x}\in A\setminus A_0.\end{cases}$$

Подмножество $A_0\subseteq A$ называется $\{F\}$-отделимым в A, если в классе $\{F\}$ разрешима хотя бы одна из систем 1)—4). Оно называется строго $\{F\}$-отделимым в A, если в классе $\{F\}$ разрешима хотя бы одна из систем 5) или 6). Класс $\{F\}$ называется полным (по отделению) относительно A, если для всякого $\{F\}$-отделимого подмножества $A_0\subseteq A$ в классе $\{F\}$ разрешима система 5). $\{F\}$ называется полным, если он полон относительно любого множества $A\subseteq R^n$. Полный относительно A класс $\{F\}$ называется абсолютно полным относительно A, если всякое подмножество $A_0\subseteq A$ $\{F\}$-отделимо в A. Для полного класса $\{F\}$ множество A называется вполне $(\{F\}, p)$-отделимым, если всякое p-элементное подмножество $A_0\subseteq A$ $\{F\}$-отделимо в A. Два полных относительно A класса $\{F\}$ и $\{H\}$ называются эквивалентными относительно A, если всякое $\{F\}$-отделимое в A подмножество также

$\{H\}$-отделимо в A, и наоборот. Скажем, что $\{F\}$-отделимое в A подмножество имеет тип (i), $i \in \overline{\{1,6\}}$, если его отделение в A можно реализовать системой типа i). Мы здесь повторили определения из работ ([11–13]).

Определение. *Полного класса $\{F\}$ назовем абсолютно полным, если он абсолютно полон относительно любого множества $A \subseteq R^n$.*

2. В дальнейшем $P(\bar{x})$ обозначает некоторый многочлен, а $\{P(\bar{x})\}$ — некоторый конечный или бесконечный класс многочленов.

Лемма 1. *Для любой функции $F(\bar{x})$, определенной в множестве $A \subseteq R^n$, существует многочлен $P(\bar{x})$ степени не выше $|A|-1$, удовлетворяющий при $\bar{x} \in A$ условию $P(\bar{x}) \cdot F(\bar{x}) > 0$, если $F(\bar{x}) \neq 0$, и $P(\bar{x})=0$, если $F(\bar{x})=0$.*

Пусть $l(P(\bar{x}))$ обозначает степень $P(\bar{x})$ и $l(\{P(\bar{x})\}) = \max\limits_{P(\bar{x}) \in \{P(\bar{x})\}} l(P(\bar{x}))$.

В случае несуществования максимума считается, что $l(\{P(\bar{x})\})=\infty$.

Теорема 1. 1) *Для любых множества $A \subseteq R^n$ и класса $\{F\}$ существует эквивалентный последнему относительно A класс $\{P(\bar{x})\}$, удовлетворяющий условию $l(\{P(\bar{x})\}) \leq |A|-1$;* 2) *класс $\{P(\bar{x})\} = \{P(\bar{x}) / l(P(\bar{x})) \leq l-1\}$, $l \geq 1$, абсолютно полон относительно любого l-элементного множества $A \subseteq R^n$;* 3) *класс всех многочленов $P(\bar{x})$ является абсолютно полным.*

Отметим, что утверждение пункта 1) верно для более строгого понимания эквивалентности классов относительно множества, чем ее понимание для полных классов, а именно—для эквивалентности классов по любой совокупности типов отделения подмножеств.

Конструктивное доказательство леммы 1 можно проводить по известным методам Лагранжа. Это позволяет сформулировать следующее утверждение

Теорема 2. *Пусть преобразование $\bar{u}(\bar{x}) = (P_1(\bar{x}), \dots, P_m(\bar{x}))$ отображает множество $A \subseteq R^n$ на множество $B \subseteq S_1 \times \dots \times S_m$, $|A|=|B|$, где $|S_i|=2$ при $i=\overline{1,m}$. Тогда для любой функции $F(\bar{x})$, определенной в A, существует многочлен $P(\bar{x})$, степени не выше $l(P_1(\bar{x})) + \dots + l(P_m(\bar{x}))$ и такой, что $P(\bar{x})=F(\bar{x})$ при $\bar{x} \in A$.*

Обозначим $l(A)=\min l(\{P(\bar{x})\})$, где минимум ищется по всем абсолютно полным относительно множества $A \subseteq R^n$ классам $\{P(\bar{x})\}$, и $l(A,p) = \min l(\{P(\bar{x})\})$, $0 < p \leq |A|/2$, где минимум ищется по всем классам $\{P(\bar{x})\}$, доставляющим полную $(\{P(\bar{x})\}, p)$-отделимость множеству A. Величину $l(A)$ можно определить по принципу Шеннона, а именно: пусть $l(A, A_0) = \min l(P(\bar{x}))$, где минимум ищется по всем многочленам $P(\bar{x})$, отделяющим подмножества $A_0 \subseteq A$ в A и $l(A)=\max\limits_{A_0 \subseteq A} l(A, A_0)$.

Пуст $\{A_0\} \subseteq 2^A$ и $l(A, \{A_0\}) = \max\limits_{A_0 \in \{A_0\}} l(A, A_0)$.

Лемма 2. *Пусть преобразование* $\bar{u}(\bar{x}) = (\bar{a}_1\bar{x}+b_1, \ldots, \bar{a}_m\bar{x}+b_m)$ *отображает множество* $A \subset R^n$ *на множество* $B \subset R^m$ *и* $\{A_0\} \subseteq 2^A$ *есть множество всех полных прообразов подмножеств из* 2^B. *Тогда*:

1) *если* $A_0 \in \{A_0\}$ *и* $A_0 \xrightarrow{\bar{u}(\bar{x})} B_0$, *то* $l(A, A_0) \leqslant l(B, B_0)$;

2) $l(A, \{A_0\}) \leqslant l(B)$.

Теорема 3. *Если преобразование* $\bar{u}(\bar{x}) = (\bar{a}_1\bar{x}+b_1, \ldots, \bar{a}_n\bar{x}+b_n)$ *невырожденное и* $A \xrightarrow{\bar{u}(\bar{x})} B$, *то* $l(A)=l(B)$.

Из определений и теоремы 1 следуют неравенства $l(A, p) \leqslant \leqslant l(A) \leqslant |A|-1$.

Теорема 4. *Если* $A \subseteq S_1 \times \ldots \times S_n$, *то* $l(A) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} |S_i| - n$.

Пусть зафиксированы $A_0 \subseteq A \subset R^n$, целое $i \in \{\overline{1, n}\}$ и $\bar{c}(i) = (c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_n) \in R^{n-1}$. Через $s(\bar{c}(i), A, A_0)$ обозначим общее число переходов из множества A_0 в $A \setminus A_0$ и наоборот, при изменении x_i от $-\infty$ до $+\infty$ в переменной точке $\bar{x}=(c_1, \ldots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \ldots, c_n)$. Пусть также $A(\bar{c}(i)) = \{\bar{x} \in A / x_1=c_1, \ldots, x_{i-1}=c_{i-1}, x_{i+1}=c_{i+1}, \ldots, x_n=c_n\}$ и $s(i, A, A_0) = \max\limits_{\bar{c}(i)} s(\bar{c}(i), A, A_0)$.

Теорема 5. 1) *Пусть* $P(\bar{x})$ *строго отделяет* A_0 *в* A. *Тогда степень* $P(\bar{x})$ *по переменной* x_i *не меньше* $s(i, A, A_0)$; 2) $l(A) \geqslant \geqslant \max\limits_{i}\{\max\limits_{\bar{c}(i)} |A(\bar{c}(i))|\} - 1$.

3. Пусть $B(P(\bar{x}))$ обозначает множество всех одночленов $x_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{m_n}$; $m_1, \ldots, m_n \geqslant 0$, каждый из которых с ненулевым коэффициентом входит в стандартном представлении $P(\bar{x})$. Пусть также $B_0(P(\bar{x})) = \{(i_1, \ldots, i_k) \in \{\overline{1, n}\} / \exists m_1, \ldots, m_k \in N, x_{i_1}^{m_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_k}^{m_k} \in B(P(\bar{x})), k \geqslant 0\}$ (считается, что $\varnothing \in B_0(P(\bar{x}))$, если $1 \in B(P(\bar{x}))$), $B(\{P(\bar{x})\}) = \bigcup\limits_{P(\bar{x}) \in \{P(\bar{x})\}} B(P(\bar{x}))$ и $B_0(\{P(\bar{x})\}) = \bigcup\limits_{P(\bar{x}) \in \{P(\bar{x})\}} B_0(P(\bar{x}))$. Далее, аналогично определениям $l(A)$ и $l(A, p)$ определим величины $B(A) = \min|B(\{P(\bar{x})\})|$, $B_0(A) = \min|B_0(\{P(\bar{x})\})|$ и $B(A, p) = \min|B(\{P(\bar{x})\})|$, $B_0(A, p) = \min|B_0(\{P(\bar{x})\})|$.

Из определений следуют неравенства $|B_0(\{P(\bar{x})\})| \leqslant |B(\{P(\bar{x})\})|$, $|B_0(\{P(\bar{x})\})| \leqslant 2^n$, $B_0(A, p) \leqslant B_0(A) \leqslant B(A)$ и $B_0(A, p) \leqslant B(A, p) \leqslant B(A)$.

Теорема 6. 1) $B(A)\leqslant\binom{l(A)+n}{n}$; 2) *если* $A\subseteq S_1\times\ldots\times S_n$, *то* $B(A)\leqslant\prod_{i=1}^{n}|S_i|$.

4. Рассмотрим класс $\{F\}=\left\{\sum_{i=1}^{q}a_i f_i(\bar{x})+b\right\}$ — линейное замыкание множества функций $\{f_1(\bar{x}),\ldots f_q(\bar{x}),1\}$. Из ([9–11]) известно утверждение: подмножество $A_0\subseteq A$ $\{F\}$-отделимо в A тогда и только тогда, когда в классе $\{F\}$ разрешима система

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{q}\left|\sum_{\bar{x}\in A_0}f_i(\bar{x})-\sum_{\bar{x}\in A\setminus A_0}f_i(\bar{x})\right|a_i+(2|A_0|-|A|)b=\sum_{\bar{x}\in A}\left|\sum_{i=1}^{q}a_i f_i(\bar{x})+b\right|,\\ \sum_{i=1}^{q}a_i f_i(\bar{x})+b\neq 0,\quad \text{при}\quad \bar{x}\in A.\end{cases}$$

Нижеследующие леммы 3 и 4 доказываются при помощи этого утверждения.

Пусть $S_i=\{s_{i,1},\ldots,s_{i,|S_i|}\}$, $i\in\{\overline{1,n}\}$, где $s_{i,1}<\ldots<s_{i,|S_i|}$, и $A_0(\sigma)=\{(s_{1,j_1},\ldots,s_{n,j_n})\in S_1\times\ldots\times S_n/j_1+\ldots+j_n\equiv\sigma(\mathrm{mod}\,2)\}$, где $\sigma\in\{0,1\}$.

Лемма 3. *Пусть* $|S_i|=0$ (mod 2) *при* $i=\overline{1,n}$ *и* $P(\bar{x})$ *строго отделяет* $A_0(\sigma)$ *в* $S_1\times\ldots\times S_n$. *Тогда* $\{\overline{1,n}\}\in B_0(P(\bar{x}))$.

Теорема 7. *Пусть* $S_1\times\ldots\times S_n\subseteq A$, *где* $|S_i|\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$ *при* $i=\{\overline{1,n}\}$, *и класс* $\{P(\bar{x})\}$ *абсолютно полон относительно* A. *Тогда*: 1) $\{\overline{1,n}\}\in B_0(\{P(\bar{x})\})$; 2) $l(A)\geqslant n$.

Через $\{P^*(\bar{x})\}$ обозначим класс всех многочленов, степень которых по каждой переменной не выше первой.

Пусть $A_0(i_1,\ldots,i_k)=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\{-1,1\}^n/x_{i_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_k}>0\}$, $k\in N$.

Лемма 4. *Если* $P^*(\bar{x})\in\{P^*(\bar{x})\}$ *строго отделяет* $A_0(i_1,\ldots,i_k)$ *в* $\{-1,1\}^n$, *то* $\{i_1,\ldots,i_k\}\in B_0(P^*(\bar{x}))$.

Теорема 8. *Пусть* $|S_i|=2$ *при* $i=\overline{1,n}$. *Тогда*: 1) *Класс* $\{P^*(\bar{x})\}$ *абсолютно полон относительно любого множества* $A\subseteq S_1\times\ldots\times S_n$; 2) *для любого* $l\in\{\overline{0,n}\}$ *существует подмножество* $A_0\subseteq S_1\times\ldots\times S_n$ *с условием* $l(S_1\times\ldots\times S_n,A_0)=l$.

Теорема 9. 1) *Пусть класс* $\{P(\bar{x})\}\subseteq\{P^*(\bar{x})\}$ *абсолютно полон относительно* $\{-1,1\}^n$. *Тогда*: а) $B_0(\{P(\bar{x})\})=2^{\overline{1,n}}$; б) $B(\{P(\bar{x})\})=\{x_1^{m_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{m_n}/m_i\in\{0,1\},\ i=\overline{1,n}\}$. 2) $B(\{-1,1\}^n)=2^n$.

5. Верхние оценки числа $\{F\}$-отделимых подмножеств, установленные с участием сложностей, подобных рассмотренным выше, могут быть использованы для установления нижних оценок этих же величин. Так, пусть $s(f(\bar{x}),A)$ есть число различных значений функ-

ции $f(\bar{x})$ в множестве $A \subseteq R^n$. Тогда из соответствующей верхней оценки работы ([13]) следует утверждение.

Лемма 5. *Пусть множество* $A \subseteq R^n$ *вполне* $\left(\left\{\sum_{t=1}^{q} a_t f_t(\bar{x}) + b\right\}, p\right)$-*отделимо и* $s(f_t(\bar{x}), A) \leqslant s$, $t = \overline{1, q}$. *Тогда* $q \geqslant \log_{\binom{p+s-1}{s-1}} \binom{|A|}{p}$.

Из результатов работ ([11–13]) и леммы 5 следуют утверждения.

Теорема 10. 1) $\prod_{t=1}^{l(E^n, p)} |\min|p, 2^{n-t}| + 1|^{\binom{n}{t}} \geqslant \binom{2^n}{p}$; 2) $\sum_{t=1}^{l(E^n, p)} \binom{n}{t} \geqslant \log_{p+1} \binom{2^n}{p}$; 3) $B_0(E^n, p) \geqslant \log_{p+1} \binom{2^n}{p} + 1$, где $E^n = \{0, 1\}^n$.

Теорема 11. 1) *Пусть множество* $\{-1, 1\}^n$ *вполне* $(\{P(\bar{x})\}, p)$-*отделимо, где* $\{P(\bar{x})\} \subseteq \{P^*(\bar{x})\}$. *Тогда* $|B_0(\{P(\bar{x})\}) \setminus \{\varnothing\}| \geqslant \log_{p+1} \binom{2^n}{p}$;

2) $B(\{-1, 1\}^n, p) \geqslant \log_{p+1} \binom{2^n}{n}$; 3) $\sum_{t=1}^{l(\{-1, 1\}^n, p)} \binom{n}{t} \geqslant \log_{p+1} \binom{2^n}{p}$.

Замечание. 1) *Пусть класс* $\left\{\sum_{t=1}^{q} a_t f_t(\tilde{x}) + b\right\}$ *абсолютно полон относительно множества* $A \subseteq R^n$. *Тогда из верхней оценки полного числа линейно-отделимых подмножеств, следуемой из результата Уайндера и других (см. в ([14–17])), следует неравенство* $q \geqslant |A| \cdot \log_{|A|} 2$; 2) *из указанной оценки следуют также неравенства* $B(A) \geqslant |A| \cdot \log_{|A|} 2 + 1$ *и* $\binom{l(A) + n}{n} \geqslant |A| \cdot \log_{|A|} 2 + 1$, *где* $A \subseteq R^n$.

6. Пусть задана последовательность $\{A_n\}$ множеств $A_n \subseteq R^n$, $n = 1, 2, \ldots$ Пусть также $N(n, l(n))$ есть число подмножеств $A_0 \subseteq A_n$ с условием $l(A_n, A_0) > l(n) = l$, а $N(n, p(n), l)$ — число подмножеств указанного типа, имеющие мощность $p = p(n) < \frac{|A_n|}{2}$. Скажем, что почти для всех подмножеств $A_0 \subseteq A_n$ выполняется неравенство $l(A_n, A_0) > l$, если $\lim_{n \to \infty} \frac{N(n, l)}{2^{|A_n|}} = 1$. Скажем, что почти для всех подмножеств $A_0 \subseteq A_n$ мощности p выполняется неравенство $l(A_n, A_0) > l$, если $\lim_{n \to \infty} \left| N(n, p, l) \middle/ \binom{|A_n|}{p} \right| = 1$.

Теорема 12. *Пусть* $|A_n| \to \infty$ *и* $|A_n| \cdot (\xi(n) - 1) \to -\infty$ *при* $n \to \infty$. *Тогда почти для всех подмножеств* $A_0 \subseteq A_n$ *имеет место* $l(A_n, A_0) > l$, *где* l *определяется соотношением* $\left(\binom{n + l}{n} - 1\right) \log_2 |A_n| = \xi(n) \cdot |A_n|$.

Теорема 13. *Пусть* $A_n = S_1^{(n)} \times \ldots \times S_n^{(n)}$, *где* $|S_i^{(n)}| = 2$ *при* $i = \overline{1, n}$, *и пусть для функции* $\theta(n) < 2^n$ *имеем* $\theta(n) \to \infty$ *при* $n \to \infty$. *Тогда почти для всех подмножеств* $A_0 \subseteq A_n$ *имеет место* $l(A_n, A_0) > \frac{n-2}{2} - \sqrt{\frac{n}{2} \ln \frac{n \cdot 2^n}{2^n - \theta(n)}}$.

Теорема 14. *Пусть* $A_n=S_1^{(n)}\times\ldots\times S_n^{(n)}$, *где* $|S_i^{(n)}|=2$ *при* $i=\overline{1,n}$. *Тогда почти для всех подмножеств* $A_0\subseteq A_n$ *мощности* p *выполняется неравенство* $l(A_n, A_0)>l$, *где* l *удовлетворяет соотношению*

$$\lim_{n\to\infty}\left|(p+1)^{\sum_{i=1}^{l}\binom{n}{i}}\Big/\binom{2^n}{p}\right|=0.$$

Различные оценки величины $\sum_{i=1}^{l}\binom{n}{i}$ при условии $l<\frac{n+1}{2}$ (см. [18-20]) приводят к различным определениям $l=l(n)$ из теоремы 14. Например, оценка Муна (см. [18]) $\sum_{i=1}^{l}\binom{n}{i}<2^n\exp\left(-\frac{(n-2l-2)^2}{2n}\right)-1$ и простейшая оценка $\sum_{i=1}^{l}\binom{n}{i}\leqslant n^l/(l-1)!$ соответственно приводят к определяющим соотношениям

$$l=\frac{n}{2}-\sqrt{\frac{n}{2}}\ln^{1/2}\frac{2^n\log_2(p+1)}{n\cdot 2^n-(2^n-p)\log(2^n-p)-\left(p-\frac{1}{2}\right)\log_2(p+1)-\theta(n)}$$

и

$$l-\log_n[(l-1)!]=\log_n\frac{n\cdot 2^n-(2^n-p)\log_2(2^n-p)-\left(p+\frac{1}{2}\right)\log_2(p+1)-\theta(n)}{\log_2(p+1)},$$

где $\theta(n)$ допустимая для рассматриваемого соотношения функция и $\theta(n)\to\infty$ при $n\to\infty$.

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Ռ. Ն. ԹՈՐՈՍՅԱՆ

Վերջավոր բազմություններում ենթաբազմությունների բազմանդամային անջատման բարդության մասին

Դիտարկվում են n-չափանի էվկլիդյան տարածության վերջավոր բազմություններ և n-փոփոխականներից կախված իրական ֆունկցիաներ։

A բազմության A_0 ենթաբազմությունը կոչվում է $\{F\}$-անջատելի A-ում, եթե գոյություն ունի $\{F\}$ դասին պատկանող ֆունկցիա, որն իր նշաններով տարբերում է A_0 և $A\setminus A_0$ բազմությունները։ Աշխատանքում ցույց է տրվում, որ A-ի ենթաբազմությունների անջատման տեսակետից կամայական $\{F\}$ դաս համարժեք է բազմանդամների որոշակի դասի, իսկ բոլոր բազմանդամների դասը նույն տեսակետից բացարձակ լրիվ է։ Վերջինը նշանակում է, որ կամայական A բազմության կամայական ենթաբազմություն բազմանդամային-անջատելի է A-ում։

Մտցվում է ենթաբազմությունների բազմանդամային անջատման բարդության երեք բնութագրիչներ և տրվում դրանց գնահատականներ։ Բերված գնահատականներից յուրաքանչյուրը կամ ճշգրիտ է, կամ հասանելի, կամ էլ կրում է ասիմպտոտիկական բնույթ՝ ձևակերպված «համարյա բոլոր ենթաբազմությունների համար» տերմիններով։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. В. Яблонский*, Введение в дискретную математику, Наука, М., 1979. [2] Дискретная математика и мат. вопросы кибернетики, т. 1, Наука, М., 1974. [3] *Ю. И. Журавлев*, Проблемы кибернетики, вып. 8 (1962). [4] *Э. И. Нечипорук*, Пробл. кибернетики, вып. 11 (1964). [5] *О. Б. Лупанов*, Пробл. кибернетики, вып. 26 (1973). [6] *А. А. Сапоженко*, Дизъюнктивные нормальные формы, изд-во МГУ, 1975. [7] *М. Дертоузос*, Пороговая логика, Мир, М., 1967. [8] *Р. Г. Нигматуллин*, Сложность булевых функций, изд-во Казанского гос. ун-та, 1983. [9] *Б. Е. Торосян*, VI Всесоюзн. конф. по пробл. теор. кибернетики, Тезисы докл., г. Саратов, 1983. [10] *Б. Е. Торосян*, ДАН Арм. ССР, т. 84, № 2 (1987). [11] *Б. Е. Торосян*, ДАН Арм. ССР, т. 87, № 4 (1988). [12] *Б. Е. Торосян*, ДАН Арм. ССР, т. 88, № 2 (1989). [13] *Б. Е. Торосян*, ДАН Арм. ССР, т.89, № 1 (1989). [14] *R. O. Winder*, IEEE Trans. on El. Comp., EC—12, № 5 (1963). [15] *T. M. Cover*, IEEE Trans, on El. Comp., EC—14, № 3 (1965). [16] *В. Н. Вапник, А. Я. Червоненкис*, Теория распознавания образов, Наука, М., 1974. [17] *М. Блох, Я. Моравек*, Кибернетический сб., н. с., вып. 6 (1969). [18] *П. Эрдеш, Дж. Спенсер*, Вероятностные методы в комбинаторике, Мир, М., 1976. [19] *Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко*, Сборник задач по дискретной математике, Наука, М., 1977. [20] *С. А. Федоров*, ДАН СССР, т. 276, № 6 (1984).